ORDINARY Λ-ADIC FORMS AND TWO VARIABLE p-ADIC RANKIN PRODUCT

小澤友美 (東北大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程 3 年)

Abstract. 本稿は H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series* (文献記号 [LFE]) の §7.3, §7.4 の概説で，第 24 回 (2016 年度) 整数論サマースクール「保型形式の p 進 family 入門」での講演の内容をまとめたものである.

Contents

Date: April 14, 2019.

0. はじめに

0.1. **本稿の位置付け.** サマースクールの講演予稿 [小澤] で予告したように，本稿では [LFE] の設定や議論の順序に忠実に沿い[1]，詳細な解説を試みる．筆者の判断により，必要に応じて原典に書いていない説明を付け加えた．本稿が [LFE] の理解の一助となれば幸いである．なるべく議論の目的意識が明確になるように書いたつもりだが，厳密さを重視したため，多少話の流れが見にくい部分もあるかもしれない．流れの把握を優先する場合は，講演予稿 [小澤] を参照されたい．

なお，肥田理論の歴史や関連する研究など全体像を概観する場合には，第 17 回 (2009 年度) 整数論サマースクール「l 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集に収録されている，落合理氏による記事「肥田理論の紹介」([落合]) をお勧めしたい．

0.2. **本稿の大まかな内容.** 第 1 節で Wiles によって [Wil] で定式化された "Λ-adic forms" を紹介する．第 2 節では [LFE] の Theorem 7.2.1 (§7.2, p.202) の一部である，

"$\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ の自由 $\mathcal{O}$ 加群としての階数が
2 以上の重さ k に依らず<u>一定である</u>"

という主張を Λ-adic forms の空間の Control Theorem (定理 2.2) として定式化し直した上で，証明を与える．第 3 節では Λ-adic Hecke algebra, 正規化された Λ-adic Hecke 固有形式についてその定義や基本的な性質を紹介する．

第 4 節以降では，二つの保型形式 f と h に対して定まる Rankin product L-関数 $D(s,f,h)$ について議論する．第 4 節では $D(s,f,h)$ の特殊値の代数性などを復習する．第 5 節と第 6 節で，この特殊値の代数的な部分を p-進的に補間する．第 5 節では f を Λ-adic form に置き換えた 1 変数 p-進 L-関数を，第 6 節では f と h をそれぞれ Λ-adic forms に置き換えた 2 変数 p-進 L-関数を構成する．

0.3. **記法と文献の引用について.** 記号については基本的に [LFE] で用いられているものを踏襲する．p を素数とし，p が奇素数のとき $\mathbf{p}=p$, $p=2$ のとき $\mathbf{p}=4$ とおく．$W=1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Z}_p^\times$ の主単数群として，$u=1+\mathbf{p}\in W$ とおく．Teichmüller 指標を $\omega:\mathbb{Z}_p^\times\to(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\hookrightarrow\mathbb{Z}_p^\times$ で表し，$x\in\mathbb{Z}_p^\times$ に対し $\langle x\rangle=x\omega(x)^{-1}\in W$ とおく．ϕ を Euler 関数，$\mathbb{Z}_p^\times$ に含まれる 1 の $\phi(\mathbf{p})$ 乗根の集合を $\mu_{\phi(\mathbf{p})}$ とすると，ω を $\mu_{\phi(\mathbf{p})}$ に制限したものは $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times$ への同型である．従って，その逆写像のことも $\omega:(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\to\mu_{\phi(\mathbf{p})}\hookrightarrow\mathbb{Z}_p^\times$ と書いて法 $\mathbf{p}$ の Dirichlet 指標とみなす．$\overline{\mathbb{Q}},\overline{\mathbb{Q}}_p$ をそれぞれ $\mathbb{Q},\mathbb{Q}_p$ の代数閉包とする．体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ と体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_p\cong\mathbb{C}$ をそれぞれ固定し，これらの合成を介して $\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}$ の部分体とみなす．$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体は全て $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の中で考える．

以下，[LFE] を引用する場合は引用記号 [LFE] を省略する．定理等の番号について，例えば §7.3 にある Theorem 1 を引用する場合, 本稿では Theorem 7.3.1 と記載する．

本稿内での相互参照は，日本語で「第 1 節」「第 1.1 節」「定義 1.1」のように表記する．

1. Λ-adic forms, Hecke operators and the ordinary projector

1.1. **Λ-adic forms.** 本稿では以下を Λ-adic form の定義とする．定義 1.1 は §7.3, p.208 の定義 (Λ') に対応しており，§7.1, p.196 の定義 (Λ) と見かけが少し異なる．しかし ordinary な Λ-adic forms の空間に限れば 2 つの定義は一致することが，後に明らかになる (定理 2.19).

[1][LFE] では tame level が 1 の場合しか説明されていないが，本稿では tame level N が一般の場合を説明した．実際の研究で Λ-adic forms が用いられる場合，一般の tame level を扱うことが多いためである．しかし，tame level を一般にすると何が変わるのか (あるいは変わらないのか), 重要な差異がある場合 $N=1$ のとき特に何が云えるのか, 強調するように書いたので，あまり構えずに読み進めてほしい．

N を p と互いに素な 1 以上の整数，α を 0 以上の整数，$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^{\alpha}\mathbb{Z})^{\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ を法 $N\mathbf{p}p^{\alpha}$ の偶指標 ($\chi(-1) = 1$) とする．$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の整数環 $\mathcal{O}$ を，χ の値を含むように取り，$\Lambda = \mathcal{O}[[X]]$ とおく．

定義 1.1. Λ 係数の q に関する形式的べき級数 $F(X;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,F)(X)q^n \in \Lambda[[q]]$ が tame level N, 指標 χ の **Λ-adic form** (resp. Λ-adic cusp form) であるとは

$$F(u^k-1;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,F)(u^k-1)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$$

$$(\text{resp. } F(u^k-1;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,F)(u^k-1)q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}))$$

が有限個を除くすべての整数 $k \geq 1$ について成り立つことをいう．また，tame level N, 指標 χ の Λ-adic form F が **ordinary** であるとは，有限個を除くすべての整数 $k \geq 1$ に対し

$$F(u^k-1;q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n,F)(u^k-1)q^n \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$$

が成り立つことをいう．$\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{S}(N,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ をそれぞれ tame level N, 指標 χ の Λ-adic forms, Λ-adic cusp forms, Λ-adic ordinary forms, Λ-adic ordinary cusp forms のなす集合とする．Tame level N, 指標 χ とべき級数環 Λ について曖昧さがないときは単に $\mathbf{M} = \mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$ などと書く．

注意 1.2. §7.3 や [小澤] で $\mathbf{M}(\chi,\Lambda)$ と書いている集合は，tame level 1 の Λ-adic forms の集合，すなわち本稿における $\mathbf{M}(1,\chi,\Lambda)$ に他ならない．

$F(u^k-1;q)$ を F の (重さ k での) **特殊化**という．以下 Λ-adic forms に対し，これまで考えてきた $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ の元を**古典的モジュラー形式** CLASSICAL MODULAR FORMS と呼ぶ．

注意 1.3. (1) 定義 1.1 のような，いわゆる “q-展開の p-進補間” によるモジュラー形式の p-進族の定義は，Wiles が初めて編み出し，[Wil] で発表された．肥田理論の端緒となった 2 編の論文 [H86a] 及び [H86b] では専ら Hecke 環の p-進的な性質が論じられていて，定義 1.1 の概念は登場しない．
(2) 定義 1.1 で χ を偶指標に限定する理由は，$\chi(-1) = -1$ の場合，各整数 $k \geq 1$ に対し $\chi\omega^{-k}(-1) = -(-1)^k, \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}) = 0$ となり，従って $\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$ が自明だからである．
(3) 定理 2.2 (Control Theorem) で見るように，2 以上の整数 k については，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の元の重さ k での特殊化の様子が非常によく統制されている．一方で，$k = 1$ の場合の特殊化については事情が異なる．これに関連する話題が，本サマースクールにおける佐々木秀氏の講演で解説された．報告集原稿 [佐々木] を参照されたい．

$\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{S}(N,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ には Λ の元のスカラー倍により Λ-加群の構造が入る．第 1.3 節で見るように $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ は Λ-加群として有限生成だが，$\mathbf{M}$ と $\mathbf{S}$ については重さ k が大きくなる時の $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ の階数の増大が急激であるため，同様の性質は期待できない．

1.2. **Λ-adic forms の空間の Hecke 作用素.** 次に $\mathbf{M}$ の上に Hecke 作用素を定義する．主単数群 W の位相的生成元として $u = 1 + \mathbf{p}$ を固定していた．写像 $\mathbb{Z}_p \to W; s \mapsto u^s$ は位相群の同型である．この写像の逆写像を $s : W \to \mathbb{Z}_p; x \mapsto s(x) = \log_p(x)/\log_p(u)$ と書く．群準同型 $\kappa : W \to \Lambda^{\times}$ を $\kappa(u^s) = (1+X)^s$ で定める．$\mathfrak{m}$ を Λ のただ一つの極大イデアルとすると，κ は W の p-進位相と $\Lambda^{\times}$ の $\mathfrak{m}$-進位相について連続である．

定義 1.4 (§7.3, p. 209 (1))**.** n を正の整数とする．$\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$ に属する Λ-adic form F, そのべき級数展開 $F=\sum_{m=0}^{\infty}a(m,F)(X)q^m$ に対し，$F|T(n)\in\Lambda[[q]]$ を以下で定める：

$$a(m,F|T(n))(X)=\sum_{0<b|(m,n),p\nmid b}\kappa(\langle b\rangle)(X)\chi(b)b^{-1}a(mnb^{-2},F)(X).$$

$F(u^k-1)\in\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ となる整数 $k\geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}a(m,F|T(n))(u^k-1)&=\sum_{0<b|(m,n),p\nmid b}\kappa(\langle b\rangle)(u^k-1)\chi(b)b^{-1}a(mnb^{-2},F)(u^k-1)\\&=\sum_{0<b|(m,n),p\nmid b}(u^{s(\langle b\rangle)})^k\chi(b)b^{-1}a(mnb^{-2},F)(u^k-1)\\&=\sum_{0<b|(m,n),p\nmid b}\langle b\rangle^k\chi(b)b^{-1}a(mnb^{-2},F)(u^k-1)\\&=\sum_{0<b|(m,n),p\nmid b}(\chi\omega^{-k})(b)b^{k-1}a(mnb^{-2},F)(u^k-1)\\&=a(m,F(u^k-1)|T(n))\end{aligned}$$

となるので $(F|T(n))(u^k-1)=F(u^k-1)|T(n)\in\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ である[2]．よって $T(n)$ は $\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$ を保つ．また $\mathbf{S},\mathbf{M}^{\mathrm{ord}},\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ がそれぞれ $T(n)$ で保たれることもこの計算から従う．この $T(n)$ を (n での) **Hecke 作用素**という．

注意 1.5. (1) 整数 $m,n\geq 1$ に対し，$T(m)$ と $T(n)$ の作用は可換である．
(2) Np を割らない素数 l に対し，$T(l^2)-T(l)^2=\kappa(\langle l\rangle)(X)\chi(l)l^{-1}$ となる．特に，この式の右辺は $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N\mathbf{p}p^\alpha);\mathcal{O})$ 上の diamond operator を p-進的に補間している．

1.3. **Λ-adic forms の空間の Λ-加群としての構造.** 次に $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}},\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ の Λ-加群としての構造を調べる．次が知られている：

定理 1.6 (Theorem 7.3.1; §7.3, p.209)**.** $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ と $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ はそれぞれ有限生成自由 Λ-加群である．

$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ で証明の方法が全く同じなので，以下では $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}=\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ について上の定理を示す．Λ は Krull 次元 2 の局所環で UFD，その唯一の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると Λ は $\mathfrak{m}$-進位相についてコンパクトであることに注意せよ．以下，$\mathbf{L}$ で Λ の商体を表す．証明を次の二段階に分ける：

(1) $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が有限生成 Λ-加群で Λ-torsion がないことを示す；
(2) $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が自由 Λ-加群であることを示す．

証明に必要な補題を一つ紹介する：

補題 1.7 (Weierstrass の p 進準備定理 (Lemma 7.3.1; §7.3, p.209))**.** 多項式

$$P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n\in\mathcal{O}[X]$$

は，任意の $i=0,1,\ldots,n-1$ について $a_i\in\varpi\mathcal{O}$ を満たすとき distinguished polynomial と呼ばれる．ただし ϖ は $\mathcal{O}$ の素元の一つである．0 でない任意のべき級数 $A(X)\in\Lambda$ は，ある整数 $\mu\geq 0$, distinguished polynomial $P(X)\in\mathcal{O}[X]$ と単元 $U(X)\in\Lambda^\times$ を用いて一意的に $A(X)=\varpi^\mu P(X)U(X)$ と表される．特に，0 でない Λ の元の零点は有限個である．

[2]ただし $F(u^k-1)|T(n)$ の $T(n)$ はレベル $N\mathbf{p}p^\alpha$ のそれである (一般にレベル $N\mathbf{p}p^\alpha$ の $T(p)$ とレベル N の $T(p)$ の定義は異なるので，このような注意をしている).

この補題の証明については，[Wa] §7.1, Theorem 7.3 を参照されたい．

定理 1.6 の証明．　(1) M を $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ に含まれる有限生成自由 Λ-加群，その Λ-基底を $F_1, F_2, \ldots, F_r$ とする．線形独立性から，行列式 $D(X) = \det(a(n_i, F_j)(X))_{1\le i,j\le r}$ が Λ の元として 0 でないような r 個の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 0$ が取れる．補題 1.7 より $D(X)$ の零点は有限個だから，整数 $k \geq 2$ で次の 2 条件を満たすものが取れる：

(a) $D(u^k - 1) \neq 0$;

(b) 任意の i に対し $f_i = F_i(u^k - 1) \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$.

このように k を取ると $f_1, f_2, \ldots, f_r$ は $\mathcal{O}$ 上線形独立である．Theorem 7.2.2 (§7.2, p.203) より $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ の $\mathcal{O}$-加群としての階数は重さ k に依存しない値で上から評価される．そこで M をその階数 r が最大になるように取ると，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の任意の元 F は F_i たちの $\mathbf{L}$ 上の線形結合で $F = \sum_{i=1}^r x_i F_i$ $(x_i \in \mathbf{L})$ と書ける．ただし $\mathbf{L}$ は Λ の商体．その結合係数に関する連立方程式

$$(a(n_i, F_j)(X))_{1\le i,j\le r} \cdot {}^t(x_1 \ \cdots \ x_r) = {}^t(a(n_1, F)(X) \ \cdots \ a(n_r, F)(X))$$

を解いて $D(X)\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \subset \oplus_{i=1}^r \Lambda F_i$ を得る．さらに $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が $\Lambda[[q]]$ の Λ-部分加群であるゆえ Λ-torsion を持たないことと，Λ が Noether 環であることに注意すると，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \cong D(X)\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ は有限生成 Λ-加群である．

(2) 先の議論により，整数 $k \geq 2$ で，任意の整数 $j \geq k$ と $F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ に対し $F(u^j - 1)$ が $\mathcal{M}_j^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-j}; \mathcal{O})$ に属するものが取れる．多項式 P_k を $P_k = X - (u^k - 1)$ で定める．$F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が $F(u^k - 1) = 0$ を満たすとすると，Λ は一意分解整域だからあるべき級数 $G \in \Lambda[[q]]$ があり $F = P_k G$ となる．整数 $j \geq k + 1$ に対し

$$G(u^j - 1) = F(u^j - 1)/(u^j - u^k) \in \mathcal{M}_j^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-j}; \mathcal{O})$$

となるから $G \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$. すなわち写像

$$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}); F \bmod P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} \mapsto F(u^k - 1)$$

は単射．$\mathcal{O}$ は離散付値環，特に単項イデアル整域だから $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ は有限生成自由 $\mathcal{O}$-加群となる．$F_1, F_2, \ldots, F_r \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を $f_1, f_2, \ldots, f_r$ が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の $\mathcal{O}$-基底となるように取ると $M = \oplus_{i=1}^r \Lambda F_i$ は $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の有限生成 Λ-自由部分加群である．次の可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \times P_k} & & \downarrow{\scriptstyle \times P_k} & & \downarrow{\scriptstyle \times P_k} & & \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & M/P_kM & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathrm{Cok}(i)/P_k\mathrm{Cok}(i) & &
\end{array}$$

M の取り方より $\bar{i}$ が同型だから，蛇の補題により $\mathrm{Cok}(i)/P_k\mathrm{Cok}(i) = 0$. Λ が局所環なので $P_k\Lambda$ は Λ の Jacobson 根基 (すなわち極大イデアル $\mathfrak{m}$) に含まれる．中山の補題により $\mathrm{Cok}(i) = 0$, すなわち $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}} = M$ を得る．

□

1.4. **The ordinary idempotent.** §7.2 の Lemma 7.2.1 (p.201) で冪等射影子 ORDINARY IDEMPOTENT $e : \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}) \to \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ を定義した[3]．この類似とし

[3]実際には $N = 1$ の場合しか説明されていないが，N が一般の場合も全く同様の方法で定義可能．

て，Λ-adic forms の空間にも**冪等射影子** $e:\mathbf{M}\to\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を定められることが，§7.3 の pp. 211–212 で述べられている．$F\in\mathbf{M}$ を取り，$F|e\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ を定義したい．Λ-adic forms の定義から，ある整数 $a\geq 2$ が存在し，任意の整数 $k\geq a$ に対し $F(u^k-1)\in\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ となる．各整数 $k\geq a$ に対し $\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O})=\sum_{l=a}^k\mathcal{M}_l(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-l};\mathcal{O})$ とおく．

補題 1.8. 実際には $\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O})=\oplus_{l=a}^k\mathcal{M}_l(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-l};\mathcal{O})$ が成り立つ．

Proof. $A=\mathcal{O}\cap\overline{\mathbb{Q}}$ とおくと A は $\mathbb{C}$ の部分代数と見なせる．まず A に対して主張を示す．モジュラー形式 $f_l\in\mathcal{M}_l(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-l};A)$ たちが $\sum_{l=a}^k f_l=0$ を満たすと仮定する．相異なる行列 $\gamma_a,\gamma_{a+1},\ldots,\gamma_k\in\Gamma_1(N\mathbf{p}p^\alpha)$ を，$\det(j(\gamma_i,z)^l)_{a\leq i,l\leq k}$ が上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の関数として恒等的に 0 ではないように取れる (Vandermonde の行列式)．f_l たちが $\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha)$ に関する保型性を満たすことから，各 $a\leq i\leq k$ に対し

$$\sum_{l=a}^k f_l(z)j(\gamma_i,z)^l=\sum_{l=a}^k f_l(\gamma_i z)=0$$

が成り立つ．連立方程式

$$(j(\gamma_i,z)^l)_{a\leq i,l\leq k}\cdot{}^t(f_a(z),\cdots,f_k(z))={}^t(0,\cdots,0)$$

を解いて $f_a=f_{a+1}=\cdots=f_k=0$. これで A について補題の主張が示された．$\mathcal{O}$ に対する主張は $\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O})=\mathcal{M}_{a,k}(A)\otimes_A\mathcal{O}$ より従う． □

補題 1.8 により $\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O})$ 上に Hecke 作用素 $T(n)$ の作用を

$$(\oplus_{l=a}^k f_l)|T(n)=(\oplus_{l=a}^k f_l|T(n))$$

で定めることができる．$\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O})$ は有限生成自由 $\mathcal{O}$-加群だから，$\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O}))$ の中で Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ が生成する $\mathcal{O}$-代数 $R_{a,k}$ は有限生成自由 $\mathcal{O}$-加群．よって Lemma 7.2.1 より各 k について冪等元 $e_k=\lim_{n\to\infty}T(p)^{n!}\in R_{a,k}$ が定まる．ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{a,k}&=\left\{G\in\mathbf{M}\mid G(u^l-1)\in\mathcal{M}_l(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha),\chi\omega^{-l};\mathcal{O}),\quad a\leq\forall l\leq k\right\},\\ \mathbf{M}'_{a,k}&=\left\{G\in\mathbf{M}_{a,k}\mid G(u^l-1)=0,\quad a\leq\forall l\leq k\right\}\end{aligned}$$

とおくと，準同型

$$\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k}\to\mathcal{M}_{a,k}(\mathcal{O});G\mapsto\oplus_{l=a}^k G(u^l-1)$$

は単射．$\mathbf{M}_{a,k},\mathbf{M}'_{a,k}$ がそれぞれ Hecke 作用素で保たれることから $\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k}$ もまた然り．よって e_k が $\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k}$ に作用する．整数 $a\leq j\leq k$ に対し自然な射影

$$\pi_{k,j}:\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k}\to\mathbf{M}_{a,j}/\mathbf{M}'_{a,j};G\bmod\mathbf{M}'_{a,k}\mapsto\oplus_{l=a}^j G(u^l-1)$$

があり，$\pi_{k,j}\circ e_k=e_j\circ\pi_{k,j}$ が成り立つ．一方で多項式 Ω_k を $\Omega_k=\prod_{l=a}^k(X-(u^l-1))$ で定めると，Λ が一意分解整域であることから $\mathbf{M}_{a,k}/\mathbf{M}'_{a,k}$ は自然に $(\Lambda/\Omega_k\Lambda)[[q]]$ の一部と見なせる．

注意 1.9. $\Omega_k\mathbf{M}_{a,k}\subset\mathbf{M}'_{a,k}$ が定義から従うが，逆向きの包含関係は一般に成り立たない (ただし $\mathbf{M}'_{a,k}\subset\Omega_k\mathbf{M}$ は成り立つ)．

以上の議論により，整数 $n\geq 1$ に対し

$$a(n,F|e)(X)=\varprojlim_k a(n,(F\bmod\mathbf{M}'_{a,k})|e_k)\in\varprojlim_k(\Lambda/\Omega_k\Lambda)=\Lambda$$

が定まる．任意の整数 $k \geq a$ に対し $a(n, F|e)(u^k-1) = a(n, F(u^k-1)|e)$, すなわち $F|e \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ が成り立つ．また，単位元 $0 \in \Lambda$ の 2 つの基本近傍系 $\{\mathfrak{m}^n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{\Omega_k\}_{k\geq a}$ の定める位相が互いに同相だから，$\mathfrak{m}$-進位相について

$$F|e = \lim_{n\to\infty} F|T(p)^{n!} \tag{1.1}$$

が成り立つ．これらをまとめたのが次の命題である：

命題 1.10 (Proposition 7.3.1; §7.3, p.212)**.** 冪等，すなわち $e^2 = e$ を満たす Λ-加群の準同型 $e : \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda) \to \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ で，以下の性質を持つものが一意的に存在する：“任意の $F \in \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda)$ と，任意の $F(u^k-1) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ なる整数 $k \geq 1$ に対し

$$(F|e)(u^k-1) = F(u^k-1)|e$$

が成り立つ”

この e を **ordinary idempotent** という．

2. The control theorem

この節では，§7.3 の主定理である Control Theorem の主張を紹介し，その証明を細部にわたって解説する．

2.1. **Control Theorem の主張と証明のあらすじ.**

Control Theorem の主張を述べるために，Λ-adic forms の特殊化の概念を広げておく．

記法 2.1. $\mathbf{L}$ で Λ の商体を表す．Λ-代数 A に対し $\mathbf{M}(N, \chi, A) = \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda) \otimes_{\Lambda} A$ と書く．$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}$ などに対しても同様の記法を用いる．また K で $\mathcal{O}$ の商体を表す．位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ に対し，$\Lambda_{\varepsilon} = \mathcal{O}[\varepsilon][[X]]$ とおく．

整数 k と位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ に対し $P_{k,\varepsilon}$ で $\varepsilon(u)u^k - 1$ の $\mathcal{O}$ 上の最小多項式を表す．ε が自明な場合，$P_{k,1}$ をこれまでと同様 P_k と書く．$\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \Lambda \to \mathcal{O}[\varepsilon]$ を $\varphi_{k,\varepsilon}(X) = \varepsilon(u)u^k - 1$ で定める．すなわち $\ker(\varepsilon_{k,\varepsilon}) = P_{k,\varepsilon}\Lambda$ である．$\varphi_{k,\varepsilon}$ をテンソル積による係数拡大で自然に $\mathcal{O}[\varepsilon]$-代数の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \Lambda_{\varepsilon} \to \mathcal{O}[\varepsilon]$ に延長する．これに伴い，$\mathcal{O}$-加群の準同型 $\varphi_{k,\varepsilon} : \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda) \to \mathcal{O}[\varepsilon][[q]]$ も $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群の準同型

$$\varphi_{k,\varepsilon} : \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda_{\varepsilon}) \to \mathcal{O}[\varepsilon][[q]]; F(X; q) \mapsto F(\varepsilon(u)u^k - 1; q)$$

に延長される．これを (k, ε) での特殊化という．

定理 2.2 (Theorem 7.3.3; §7.3, p.215 の後半の主張)**.** χ を W 上自明な (すなわち法 $N\mathbf{p}$ の) 偶指標，$\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ を $\ker(\varepsilon) = W^{p^{r(\varepsilon)}}$ を満たす指標とする．このとき任意の整数 $k \geq 2$ について次が成り立つ：

$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_{\varepsilon})) = \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]). \tag{2.1}$$

Λ-adic ordinary cusp forms の空間についても同様の主張が成り立つ．

以下，式 (2.1) の右辺の空間を $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}} = \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ と略記する．定理 2.2 は $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ の $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群としての階数が重さ $k \geq 2$ に依らず，その一定の値が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ の Λ-加群としての階数に一致することを主張している．特にこの定理が Theorem 7.2.1 (§7.2, p.202) を含んでいることに注意されたい．

さて，この定理の証明はどのようにして与えられるのだろうか．以降の議論の見通しを良くするため，先にその証明の大まかな方針を明らかにしておきたい．証明は大きく 2 つの段階に分けられる：

(1) **十分大きなすべての整数 k について (2.1) が成り立つことを示す．**

(1-a) $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ の部分集合 $\{G\}$ で，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ を $\mathbf{L}$ 上生成するものを，Λ-adic Eisenstein 級数を用いて具体的に構成する (命題 2.18 (1)).

【§7.3 の p. 212, Proposition 7.3.1 の直後から p. 213, 下から 9 行目まで】

(1-b) (1-a) で構成した $\{G\}$ の元を用いて，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon)$ と $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\varepsilon\chi,\Lambda_\varepsilon)$ の間に同型があることを見る (定理 2.19)．この結果 $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))$ が $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ に含まれることが分かる．ここでは指標 ε の導手に関する考察が肝要である．

【§7.3 の p. 213, 下から 8 行目から p. 214, Theorem 7.3.2 まで】

(1-c) $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))$ が $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ を含むことを示す．この部分の証明は，任意の整数 $k\geq 1$ について通用する方法で与えられる (命題 2.20).

【§7.3 の p. 215, Theorem 7.3.3 の前半部とその証明】

(2) **すべての整数 $k\geq 2$ について (2.1) が成り立つことを示す．**

このステップにおいて最も重要な問題は，すべての整数 $k\geq 2$ に対して $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))$ が $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ に含まれるか否かである．ステップ (1-c) で逆向きの包含関係が成り立つことは示したから，

$$\mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))=\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$$

を任意の整数 $k\geq 2$ について示せば良い[4]．ステップ (1) を踏まえれば，これは任意の整数 $k\geq 2$ について $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}=\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}_{2,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ を示すことに他ならない．Eichler-Shimura 同型により両者を多項式表現の群コホモロジーと同一視して，コホモロジー群への Hecke 作用素 $T(p)$ の作用を注意深く観察することにより階数の一致を示す (定理 2.22).

【§7.3 の p. 215, Theorem 7.3.3 の後半部とその証明 (p. 218, 上から 3 行目まで)】

2.2. **ステップ (1-a)．** この節では Λ-adic Eisenstein 級数と畳み込み積について必要となる事項を述べ，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ の $\mathbf{L}$ 上の生成系を具体的に与える．

2.2.1. Λ-adic Eisenstein 級数. §7.1 で，Teichmüller 指標 ω の冪である指標 $\psi:(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{Z}_p^\times$ に対し，次の性質を満たす Λ-adic Eisenstein 級数 $E(\psi)$ を構成した：

命題 2.3 (Proposition 7.1.1; §7.1, p.198)**.** $\mu_{\phi(\mathbf{p})}\cong(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times$ への制限が ψ に一致する任意の原始的指標 $\eta:(\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times\to\overline{\mathbb{Q}}^\times$ と，任意の整数 $k\geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}E(\psi)(\eta(u)u^k-1)&=E_k(\eta\omega^{-k})(z)-(\eta\omega^{-k})(p)p^{k-1}E_k(\eta\omega^{-k})(pz)\\&\in\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha),\eta\omega^{-k};\mathbb{Z}_p[\eta]).\end{aligned}$$

ここではこの Λ-adic Eisenstein 級数の定義を拡張したい．定数項を定義することが構成の本質である．古典的な Eisenstein 級数の定数項は Dirichlet L-関数の非負整数での特殊値で記述されるため，それらを p-進的に補間する $E(\chi)$ の定数項が p-進 L-関数と関連することは自然である．このことを [Wil] §1.3 に沿って振り返りたい．

久保田-Leopoldt の p-進 L 関数 $L_p(s,\eta)$ の (構成方法等の) 詳細には立ち入らないので，[Iw] や [Wa] §7 を参照されたい．ここで必要となる重要な性質として，$L_p(s,\eta)$ は $s\in\mathbb{Z}_p\setminus\{1\}$ 上の p-進連続関数であり，以下の補間性質で一意に特徴付けられる ((1.3.2); p. 542 of [Wil]):

$$L_p(1-k,\eta)=L(1-k,\eta\omega^{-k})(1-\eta\omega^{-k}(p)p^{k-1})\quad\text{for } k=1,2,\ldots.$$

---

[4]実際，$\mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))=\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ が示せれば，$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))\supseteq\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ がステップ (1-c) で示されていることと，$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))$ と $\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ がいずれも有限生成自由 $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群であることより，両者の商は位数有限な $\mathcal{O}[\varepsilon]$-加群となる．すなわち，$\mathcal{O}[\varepsilon]$ の素元 ϖ の適当な冪 ϖ^n $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))\subseteq\varpi^{-n}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ となるものが取れる．一方で定義から $\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon))$ は $\mathcal{O}[\varepsilon][[q]]$ に含まれるから，$\varpi^{-n}\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}\cap\mathcal{O}[\varepsilon][[q]]=\mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}$ であることに注意して両者は一致する．

さらに $L_p(s,\eta)$ は以下の意味で p-進解析的 (べき級数で表される関数) である．

定義 2.4 (cf. p. 542 of [Wil])**.** $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ を法 $N\mathbf{p}p^\alpha$ の指標とする．η が有理数体の大域類体論を経由して $W = 1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ の位数有限指標と見なせるとき，η は W 型であるという．

W 型の指標 η に対し，W の生成元 $u = 1+\mathbf{p}$ を写像

$$\mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times$$

で移した元の η による像を $\eta(u)$ と書く．冪級数 $H_\eta(X) \in \Lambda$ を

$$H_\eta(X) = \begin{cases} \eta(u)(1+X)-1 & \text{if } \eta \text{ is of type } W, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．このとき，べき級数 $G_\eta(X) \in 2\Lambda$ で，任意の $s \in \mathbb{Z}_p \setminus \{1\}$ に対し

$$L_p(1-s,\eta) = G_\eta(u^s-1)/H_\eta(u^s-1)$$

となるものが一意的に存在する ((1.3.4); p. 542 of [Wil]). 特に η が W 型でなければ $L_p(s,\eta)$ は $s=1$ でも解析的 (従って連続) で，W 型の指標 ε に対しては

$$G_{\varepsilon\eta}(X) = G_\eta(\varepsilon(u)(1+X)-1) \quad (\text{in } \mathcal{O}[\varepsilon][[X]])$$

が成り立つことが知られている ([Wa] §7.2 にも多少説明がある).

定義 2.5 (cf. (1.3.5); p. 543 of [Wil][5])**.** 偶指標 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ に対し，**Λ-adic Eisenstein 級数** $E(\chi)$ を以下で定義する：

$$\begin{aligned} a(0,E(\chi))(X) &= \frac{G_\chi(X)}{2H_\chi(X)}; \\ a(n,E(\chi))(X) &= \sum_{0<d|n,\, p\nmid d} \chi(d)A_d(X) \quad (n=1,2,\ldots). \end{aligned}$$

ただし $A_d(X) \in \Lambda$ は §7.1, p. 197 で定義されたものとする．

$E(\chi)$ の特殊化を計算する．整数 $k \geq 1$ と位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対し

$$\begin{aligned} a(0,E(\chi))(\varepsilon(u)u^k-1) &= G_\chi(\varepsilon(u)u^k-1)/2H_\chi(\varepsilon(u)u^k-1) \\ &= G_{\varepsilon\chi}(u^k-1)/2H_{\varepsilon\chi}(u^k-1) \\ &= 2^{-1}L_p(1-k,\varepsilon\chi) \\ &= 2^{-1}L(1-k,\varepsilon\chi\omega^{-k})(1-(\varepsilon\chi\omega^{-k})(p)p^{k-1}), \\ a(n,E(\chi))(\varepsilon(u)u^k-1) &= \sum_{0<d|n,\, p\nmid d} \chi(d)d^{-1}(\varepsilon(u)u^k)^{s(\langle d\rangle)} \\ &= \sum_{0<d|n,\, p\nmid d} \chi(d)\varepsilon(\langle d\rangle)\langle d\rangle^k d^{-1} \\ &= \sum_{0<d|n,\, p\nmid d} (\varepsilon\chi\omega^{-k})(d)d^{k-1} \end{aligned}$$

[5][Wil] における Λ-adic form $F(X)$ の定義は，$F(\varepsilon(u)u^{k-2}-1)$ が重さ k のモジュラー形式になることを要請していて，本稿の定義とは u のべきが 2 だけずれている．そのため [Wil] の (1.3.5) では $G_\chi(X)$ の代わりに $G_\chi(u^2(1+X)-1)$ を考えている ($H_\chi(X)$ についても同様).

となる．従って

$$E(\chi)(\varepsilon(u)u^k - 1) = E_k(\varepsilon\chi\omega^{-k})(z) - (\varepsilon\chi\omega^{-k})(p)p^{k-1}E_k(\varepsilon\chi\omega^{-k})(pz)$$
$$\in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\max\{\alpha, r(\varepsilon)\}}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$$

が成り立つ． χ が W 型でないとき $E(\chi) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ となる．一方 χ が W 型のとき，$E(\chi)$ の定数項 $a(0, E(\chi))(X)$ が Λ の元ではないが，$H_\chi(X)E(\chi) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ が成り立つ (Proposition 1.3.1; p. 542 of [Wil]).

以下の議論では，Λ-adic Eisenstein 級数の定義を更に拡張しておく必要がある．

定義 2.6. $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^\alpha\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ を，定義 2.5 と同様の偶指標とする．Dirichlet 指標 η_1, η_2 と正の整数 t の組 (η_1, η_2, t) で，以下の条件を満たすもの全体の集合を $A(N\mathbf{p}p^\alpha, \chi)$ で表す：

(1) $\chi = \eta_1\eta_2$,
(2) v_i で η_i の導手を表す時，$tv_1v_2 \mid N\mathbf{p}p^\alpha$ かつ $p \nmid tv_2$.

特に $(\chi, \mathbf{1}_1, 1) \in A(N\mathbf{p}p^\alpha, \chi)$ となることに注意されたい．

定義 2.7. $(\eta_1, \eta_2, t) \in A(N\mathbf{p}p^\alpha, \chi)$ に対し $E(\eta_1, \eta_2; t) \in \mathbf{L}[[q]]$ を以下で定める：

$$E(\eta_1, \eta_2; t)(X; q) = \delta(\eta_2)\frac{G_{\eta_1}(X)}{H_{\eta_1}(X)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n, p\nmid d}\eta_1(d)\eta_2(n/d)A_d(X)\right)q^{tn}.$$

ただし $\delta(\eta_2)$ は $\eta_2 = \mathbf{1}_1$ の時 $1/2$, それ以外の時 0 とする．

この $E(\eta_1, \eta_2; t)$ が ordinary Λ-adic form となること，またこのように拡張された Λ-adic Eisenstein 級数を考える必要があることについては，第 2.2.2 節で述べる．

注意 2.8. 定義 2.7 で $(\eta_1, \eta_2, t) = (\chi, \mathbf{1}_1, 1)$ としたものが，定義 2.5 の $E(\chi)$ である．また，η_1 が W 型でないなら $E(\eta_1, \eta_2; t)$ が $\Lambda[[q]]$ に属し，η_1 が W 型のときは $H_{\eta_1}(X)E(\eta_1, \eta_2; t)$ が $\Lambda[[q]]$ に属する．

2.2.2. 古典的な Eisenstein 級数が生成する空間. ステップ (1-a) の目的は，Λ-adic Eisenstein 級数と畳み込み積を用いて $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{L})$ の生成元を与えることである．そのために，まずは古典的な Eisenstein 級数が生成する空間に関する結果を振り返る[6].

定義 2.9 (cf. [H86b] §5). 整数 $k \geq 2$ と $r \geq 1$, $v_1v_2 \mid Np^r$ なる正の整数の組 (v_1, v_2), 法 v_i の Dirichlet 指標 ψ_i $(i = 1, 2)$ と正の整数 t に対し

$$E_k(\psi_1, \psi_2; t)(z) = \delta(\psi_2)L(1-k, \psi_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n}\psi_1(d)\psi_2(n/d)d^{k-1}\right)q^{tn}$$

とおく．ここで $\delta(\psi_2)$ は $\psi_2 = \mathbf{1}_1$ の時 $1/2$ で，それ以外の時 0 とする．

この $E_k(\psi_1, \psi_2; t)$ の性質について，我々の議論に必要な部分を抜粋しておく：

補題 2.10 (cf. Lemma 5.2; p. 576 of [H86b]). $k \geq 2$ と $r \geq 1$ を整数とする．

(i) 以下の条件が満たされる時，定義 2.9 の $E_k(\psi_1, \psi_2; t)$ は $\mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^r))$ の元の q-展開になる：
  (a) $\psi_1\psi_2(-1) = (-1)^k$ かつ $tv_1v_2 \mid Np^r$,
  (b) $k > 2$ のとき，$i = 1, 2$ に対し ψ_i が法 v_i で原始的,

[6] この部分に関しては，tame level N を一般にしたことの影響が大きく，(議論の手筋は似ているものの) [LFE] のみを参考文献として説明するのは困難であった．読者は適宜 [H86b] の §5 や [Wil] の §1.3, §1.4 を参照してほしい．

(c) $k=2$ で次のいずれかの条件が成り立つ：

(c-1) ψ_1 が法 v_1 で原始的で $\psi_2=\mathbf{1}_{v_2}$，または ψ_2 が法 v_2 で原始的で $\psi_1=\mathbf{1}_{v_1}$，

(c-2) ψ_i が法 v_i で原始的で $(\psi_1,\psi_2)\neq(\mathbf{1}_1,\mathbf{1}_1)$，

(c-3) $(\psi_1,\psi_2)=(\mathbf{1}_{v_1},\mathbf{1}_{v_2})$ かつ v_1 が素数，かつ $v_2=1$.

(ii) 各 $k\geq 2$ と $r\geq 1$ に対し，(i) の条件 (a), (b), (c) を満たす (ψ_1,ψ_2,t) からなる (ψ_1,ψ_2,t) の組の集合を $A_k(Np^r)$ で表すと，集合

$$\{E_k(\psi_1,\psi_2;t)(z)\mid(\psi_1,\psi_2,t)\in A_k(Np^r)\}$$

が商空間 $\mathcal{E}_k(\Gamma_1(Np^r),\overline{\mathbb{Q}})=\mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^r),\overline{\mathbb{Q}})/\mathcal{S}_k(\Gamma_1(Np^r),\overline{\mathbb{Q}})$ を生成する.

注意 2.11. η を $\eta(-1)=(-1)^k$ を満たす法 Np^r で原始的な Dirichlet 指標とすると，定義 2.9 で $(\psi_1,\psi_2,t)=(\eta,\mathbf{1}_1,1)$ としたものが，従来考えてきた Eisenstein 級数 $E_k(\eta)$ に一致する．また，定義から $E_k(\psi_1,\psi_2;t)(z)=E_k(\psi_1,\psi_2;1)(tz)$ である.

我々は特に ordinary なモジュラー形式の空間に興味がある．$\mathbb{C}_p$ で $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の p-進完備化を表す. [H86b] の Lemma 5.3 にあるように，商空間 $\mathcal{E}_k(\Gamma_1(Np^r),\overline{\mathbb{Q}})$ は $\mathcal{E}_k(\Gamma_1(Np^r),\mathbb{C}_p)$ に作用する ordinary idempotent e で保たれるので，$e(\mathcal{E}_k(\Gamma_1(Np^r),\overline{\mathbb{Q}}))$ を生成する Eisenstein 級数に着目する.

定義 2.12. $k\geq 2$ を整数とし，補題 2.10 (ii) の $A_k(Np^r)$ の部分集合 $A_k^{\mathrm{ord}}(Np^r)$ を

$$A_k^{\mathrm{ord}}(Np^r)=\{(\psi_1,\psi_2,t)\in A_k(Np^r);\ \mathrm{cond}(\psi_i)=v_i\ (i=1,2)\text{ and } p\nmid tv_2\}$$

で定義する.

補題 2.13 (cf. Lemma 5.3; p. 578 of [H86b]). 整数 $k\geq 2$ と $r\geq 1$ に対し，集合

$$\left\{E_k(\psi_{1,1},\psi_2;t)(z)\mid(\psi_1,\psi_2,t)\in A_k^{\mathrm{ord}}(Np^r)\right\}$$

は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線形独立で，商空間 $e(\mathcal{E}_k(\Gamma_1(Np^r),\overline{\mathbb{Q}}))$ の基底を与える．ただし指標 $\eta:(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times\to\overline{\mathbb{Q}}^\times$ に対し，η_1 で η の $(\mathbb{Z}/\mathrm{l.c.m.}(M,p)\mathbb{Z})^\times$ への制限を表す.

$N=1$ のとき，任意の $(\psi_1,\psi_2,t)\in A_k^{\mathrm{ord}}(p^r)$ が $v_2=t=1$, $\psi_2=\mathbf{1}_1$ を満たすので，補題 2.13 により，$E_k(\eta)$ の形の Eisenstein 級数だけで商空間が生成できる．しかし，一般の tame level N についてはそうとは限らない．これが，第 2.2.1 節の定義 2.7 で Λ-adic Eisenstein 級数の定義を拡張した理由である．では，その定義にある $E(\eta_1,\eta_2;t)$ の特殊化として $E_k(\psi_{1,1},\psi_2;t)$ たちが得られることを観察する．整数 $k\geq 2$ と位数有限の指標 $\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対し，

$$\begin{aligned}
&E(\eta_1,\eta_2;t)(\varepsilon(u)u^k-1)\\
&=\delta(\eta_2)(1-(\varepsilon\eta_1\omega^{-k})(p)p^{k-1})L(1-k,\varepsilon\eta_1\omega^{-k})\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n,p\nmid d}(\varepsilon\eta_1\omega^{-k})(d)\eta_2(n/d)d^{k-1}\right)q^{tn}\\
&=E_k(\varepsilon\eta_1\omega^{-k},\eta_2;t)(z)-(\varepsilon\eta_1\omega^{-k})(p)p^{k-1}E_k(\varepsilon\eta_1\omega^{-k},\eta_2;t)(pz)\\
&=E_k((\varepsilon\eta_1\omega^{-k})_1,\eta_2;t)(z)
\end{aligned}$$

となる．最後の等号で t が p で割れないことを用いた．特に $\varepsilon=\mathbf{1}_1$ なら $(\eta_1\omega^{-k},\eta_2,t)$ は $A_k^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}p^\alpha)$ に属する．従って $E(\eta_1,\eta_2;t)\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ となる.

2.2.3. 古典的な cusp forms の空間の生成元. 第 2.2.2 節では，古典的な Eisenstein 級数が生成する空間について調べたが，第 2.2.5 節で $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ の生成元を与える上では，古典的な cusp forms の空間に関する次の定理も本質的に用いる：

定理 2.14 (Theorem 1.4.1; p. 546 of [Wil][7])**.** ψ を法 Np^r $(r\geq 1)$ の奇指標，$k>4$ を整数とする．このとき，

- $\psi_1\psi_2=\psi$, $p\mid \mathrm{cond}(\psi_i)$ $(i=1,2)$, かつ
- $\mathrm{cond}(\psi_1)\mathrm{cond}(\psi_2)\mid p^r\mathrm{cond}(\psi)$

なる Dirichlet 指標 ψ_1,ψ_2 を，次の性質を満たすように取ることができる：“任意の法 Np^r の偶指標 χ で，$\chi\omega^{-k}$ が法 Np^r で原始的なものに対し，有限個の整数 $n_1,n_2,\ldots,n_s\geq 1$ が存在して，

$$((E_1(\psi_1,\psi_2;1)E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1}_1;1))|e)|T(n_i)\quad (i=1,2,\ldots,s)$$

が $\mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(Np^r),\chi\omega^{-k},\mathbb{C}_p)$ を $\mathbb{C}_p$ 上張る”

ただし $E_1(\psi_1,\psi_2;1)$ は

$$E_1(\psi_1,\psi_2;1)(z)=\delta(\psi_2)L(0,\psi_1)+\delta(\psi_1)L(0,\psi_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{0<d|n}\psi_1(d)\psi_2(n/d)\right)q^n$$

で定義される重さ 1 の Eisenstein 級数で，$\mathcal{M}_1(\Gamma_0(Np^r),\psi)$ の元である．

注意 2.15. 定理 2.14 において，$((E_1(\psi_1,\psi_2;1)E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k}))|e)|T(n_i)$ たちは cusp forms であることに注意されたい．実際，$E_1(\psi_1,\psi_2;1)$ と $E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k})$ の，$\Gamma_1(Np^r)$ に関するカスプでの定数項を観察すると，全てのカスプの同値類で両者が打ち消しあう．そのことの証明を Appendix A に記した．

2.2.4. 畳み込み積. 定理 2.14 から見て取れるように，$\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ の $\mathbf{L}$ 上の生成系を具体的に与えるには，$E_1(\psi_1,\psi_2;1)E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1}_1;1)$ に特殊化する Λ-adic form があればよい．それを実現するのが畳み込み積である．

定義 2.16 (cf. (1.3.7); p. 543 of [Wil])**.** 指標 $\psi:(\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^{\beta}\mathbb{Z})^{\times}\to\mathcal{O}^{\times}$ と整数 $a\geq 1$ の偶奇が等しい，すなわち $\psi(-1)=(-1)^a$ を満たすとする．このとき $g\in\mathcal{M}_a(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\beta}),\psi;\mathcal{O})$ と $F\in\Lambda[[q]]$ の**畳み込み積** $g*F\in\Lambda[[q]]$ を以下で定める：

$$(g*F)(X)=gF(\psi(u)^{-1}u^{-a}(1+X)-1).$$

特に $F=E(\chi\omega^{-a})$ のとき，整数 $k\geq a+1$ と位数有限の指標 $\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ に対し

$$\begin{aligned}(g*E(\chi\omega^{-a}))(\varepsilon(u)u^k-1)&=gE(\chi\omega^{-a})((\psi^{-1}\varepsilon)(u)u^{k-a}-1)\\&=g\Big\{E_{k-a}(\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(z)\\&\qquad-(\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(p)p^{k-a-1}E_{k-a}(\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(pz)\Big\}\\&\in\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\gamma(\varepsilon)}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])\end{aligned}$$

となる ($\psi^{-1}\varepsilon\cdot\chi\omega^{-a}\cdot\omega^{-k+a}=\psi^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k}$ に注意せよ)．ただし $\gamma(\varepsilon)=\max\{\alpha,\beta,r(\varepsilon)\}$ とした．この計算結果から $g*E(\chi\omega^{-a})\in\mathbf{M}(N,\chi,\mathbf{L})$ となる[8]．

[7] $N=1$ の場合は [LFE] の Theorem 5.4.1; §5.4, p.150. ただしそこでは $E_1(\psi_1,\psi_2;1)$ の代わりに重さ $a\geq 2$ の，$E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1}_1;1)$ の代わりに重さ $k-a$ の Eisenstein 級数を考えている．

[8] より一般に $F\in\mathbf{M}(N,\chi\omega^{-a};\Lambda)$ ならば $g*F\in\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$ となるが，これを示すには以下の定理 2.19 を認める必要がある．$E(\chi\omega^{-a})(X)$ についてはその特殊化の計算が，$X=u^k-1$ のみならず $X=\eta(u)u^k-1$ (η は Dirichlet 指標) に対しても既になされていることを，上の計算で用いている．

注意 2.17. 実際には $\chi\omega^{-a}$ が W 型でなければ $g * E(\chi\omega^{-a}) \in \mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$, W 型の場合は $((\chi\omega^{-a}\psi^{-1})(u)u^{-a}(1+X)-1)(g*E(\chi\omega^{-a})) \in \mathbf{M}(N,\chi,\Lambda)$ となる (Proposition 1.3.1; [Wil], p.542).

2.2.5. $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ の具体的な生成元. 以下, 定理 2.14 の $E_1(\psi_1,\psi_2;1)$ のことを h と書く. 補題 2.13 と定理 2.14 を用いると次の命題が示せる:

命題 2.18 (Proposition 7.3.2; §7.3, p.212). $\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^{\alpha}\mathbb{Z})^{\times}\to\mathcal{O}^{\times}$ を法 $N\mathbf{p}p^{\alpha}$ の偶指標とする. また, $\psi:(\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^{\beta}\mathbb{Z})^{\times}\to\mathcal{O}^{\times}$ を導手 $N\mathbf{p}p^{\alpha}$ の奇指標とする. このとき次の二つが成り立つ:

(1) $(h*E(\chi\omega^{-1}))|e|T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ と $E(\eta_1,\eta_2;t)$ $((\eta_1,\eta_2,t)\in A(N\mathbf{p}p^{\alpha},\chi))$ が $\mathbf{L}$ 上 $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ を生成する.

(2) $k>4$ かつ $\chi\omega^{-k}$ が法 $N\mathbf{p}p^{\alpha}$ で原始的なら, 写像

$$\varphi_{k,1}:\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)\to\mathcal{O}[[q]]$$

の像が K 上生成する K-ベクトル空間が $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\chi\omega^{-k};K)$ を含む. 重さ k を十分大きく取ると両者は一致する.

Proof. (2) を先に示す. $\chi\omega^{-k}$ の導手が $N\mathbf{p}p^{\alpha}$ だから, 補題 2.13 と定理 2.14 より

$$(hE_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1};1))|e|T(n)\quad(n=1,2,\ldots),$$

$$E_k(\eta_{1,1},\eta_2;t)\quad((\eta_1,\eta_2,t)\in A_k^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}p^{\alpha})\cap A(N\mathbf{p}p^{\alpha},\chi\omega^{-k}))$$

が $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\chi\omega^{-k};K)$ を K 上張る. 先の Λ-adic Eisenstein 級数及び畳み込み積の特殊化の計算結果と照らし合わせると, これらはそれぞれ

$$((h*E(\chi\omega^{-1}))|e)|T(n)\quad(n=1,2,\ldots),$$

$$E(\eta_1,\eta_2;t)\quad((\eta_1,\eta_2,t)\in A(N\mathbf{p}p^{\alpha},\chi))$$

の $(k,\mathbf{1})$ での特殊化として得られる. よって (2) の前半部が従う. (2) の条件を満たす整数 $k>4$ を, $\varphi_{k,1}$ の像が $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ に含まれるように更に大きく取る. すると $\varphi_{k,1}$ の像が生成する K-ベクトル空間は $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\chi\omega^{-k};K)$ に一致する. これで (2) の後半部も証明できた.

次に (1) を示す. 先の議論から

$$(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))\otimes_{\mathcal{O}}K\cong\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\chi\omega^{-k};K)$$

を満たす整数 k が少なくとも一つ存在する. この k に対して, 定理 1.6 の証明から分かるように, $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\chi\omega^{-k};K)$ の K-ベクトル空間としての次元は $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ の Λ-加群としての階数 r に等しい. よって集合

$$\big\{(h*E(\chi\omega^{-1}))|e|T(n);\ n=1,2,\ldots\big\}\cup\{E(\eta_1,\eta_2;t);\ (\eta_1,\eta_2,t)\in A(N\mathbf{p}p^{\alpha},\chi)\}$$

の元の $\mathbf{L}$ 上の線形結合からなる有限集合 $\{G_j\}_{j=1}^{r}$ を, $g_j=G_j(u^k-1)$ たちが K 上線形独立となるように取れる. すると G_j たちは $\mathbf{L}$ 上線形独立でなければいけないから, 階数を比べて G_j たちが $\mathbf{L}$ 上 $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$ を張ることが分かる. □

2.3. **ステップ (1-b).** $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を位数有限の指標とし，$\ker(\varepsilon) = W^{p^{r(\varepsilon)}}$ と書く．$\Lambda_\varepsilon[[q]]$ 上の環の自己同型 ε_* を

$$(\varepsilon_* F)(X; q) = F(\varepsilon(u)(1+X) - 1; q)$$

で定める．定義から $\Lambda_\varepsilon[[q]]$ 上で $\varphi_{k,\varepsilon} = \varphi_{k,1} \circ \varepsilon_*$ となる．次が成り立つ：

定理 2.19 (Theorem 7.3.2; §7.3, p.214)**.** ε_* の $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ への制限が単射準同型

$$\varepsilon_* : \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda) \hookrightarrow \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \varepsilon\chi, \Lambda_\varepsilon)$$

を導き，$\varepsilon_*(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda))$ が Λ_ε 上生成する Λ_ε-加群が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \varepsilon\chi, \Lambda_\varepsilon)$ に一致する．特に Λ_ε-加群の同型

$$\varepsilon_* : \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon) \cong \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \varepsilon\chi, \Lambda_\varepsilon)$$

がある．また，ε_* は Hecke 作用素 $T(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 及び冪等射影子 (ordinary idempotent) e と可換．さらに $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \varepsilon\chi, \Lambda_\varepsilon)$ は次の性質で特徴付けられる：

“$N\mathbf{p}p^\delta$ を $\varepsilon\chi$ の導手とすると，任意の $F \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)$ は，有限個を除くすべての整数 $k \geq 1$ に対して $(\varepsilon_* F)(u^k - 1) \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\delta), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$ を満たす”

同様の主張が Λ-adic ordinary cusp forms の空間についても成り立つ.

この定理の証明において肝要なのは指標 $\varepsilon\chi$ の導手である．$\gamma = \max\{\alpha, r(\varepsilon)\}$ とする．$\gamma = \delta$ (すなわち $\varepsilon\chi$ が $N\mathbf{p}p^\gamma$ を法として原始的) ならば，以下のようにして，これまでの議論のみを用いて定理 2.19 が証明できる.

Proof. ($\gamma = \delta$ の場合) ε_* と Hecke 作用素の可換性は，第 1.2 節の $T(n)$ の定義に基づいて確認できる．また ε_* は Λ_ε の極大イデアルが定める位相について連続だから，式 (1.1) より ε_* と e は可換である．$\varepsilon = \mathbf{1}_1$ のとき主張が成り立つのは明らかだから，以下では ε は自明でない，すなわち $r(\varepsilon) \geq 1$ を仮定する．この仮定により $(\varepsilon\chi\psi^{-1}\omega^{-k})(p) = 0$, $(\varepsilon\chi\omega^{-k})(p) = 0$ となる．第 2.2.2 節の終わりで $E(\eta_1, \eta_2; t)$ の，第 2.2.4 節で $h * E(\chi\omega^{-1})$ の (k, ε) での特殊化をそれぞれ計算した．その結果は

$$\varepsilon_*((h * E(\chi\omega^{-1}))|e|T(n)),\ \varepsilon_*(E(\eta_1, \eta_2; t)) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \varepsilon\chi, \mathbf{L}_\varepsilon)$$

を意味している．ただし $\mathbf{L}_\varepsilon$ は Λ_ε の商体である．仮定から $\varepsilon\chi$ は $N\mathbf{p}p^\gamma$ を法として原始的だから，$\varepsilon\chi\omega^{-k}$ が $N\mathbf{p}p^\gamma$ を法として原始的であるような整数 $k > 4$ が取れる．すると定理 2.14 が適用できて，

$$\varepsilon_*((h * E(\chi\omega^{-1}))|e|T(n))\ (n = 1, 2, \ldots),\ \varepsilon_*(E(\eta_1, \eta_2; t))\ ((\eta_1, \eta_2, t) \in A(N\mathbf{p}p^\alpha, \chi))$$

が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \varepsilon\chi, \mathbf{L}_\varepsilon)$ を $\mathbf{L}_\varepsilon$ 上生成することが分かる．これより定理の主張が従う． □

この証明を $\gamma > \delta$ となる場合も適用したい．上の証明で指標の原始性を用いているのは，定理 2.14 を $\mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\gamma), \varepsilon\chi\omega^{-k}; K[\varepsilon])$ に適用する箇所である．そこでこの保型形式の空間について考察する．集合として

$$\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\gamma) = \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\gamma-1}) \tag{2.2}$$

が成り立つ．式 (2.2) の左辺が定める Hecke 作用素は

$$T(p) : \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\gamma), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\gamma), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])$$

に他ならない．一方で (2.2) の右辺の Hecke 作用素

$$T(p):\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\gamma}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])\to\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\gamma-1}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])$$

は，値域の空間のレベルの p べきが一つ減る．従って，ordinary な空間の上では $T(p)$ が可逆であることに注意すると，$T(p)^{\gamma-\delta}$ が同型

$$T(p)^{\gamma-\delta}:\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\gamma}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])\cong\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\delta}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])$$

を導く．この同型により $\gamma>\delta$ のときも $\gamma=\delta$ の場合と同様に定理 2.19 を証明できる．これにてステップ (1-b) の議論が終了した．特に，十分大きなすべての (指標 $\varepsilon\chi\omega^{-k}$ の原始性はもう気にしなくて良い) 整数 $k\geq 2$ に対して，可換図式

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon)/P_{k,\varepsilon}\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon) & \xrightarrow[\varepsilon_*]{\cong} & \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\varepsilon\chi,\Lambda_\varepsilon)/P_k\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\varepsilon\chi,\Lambda_\varepsilon)\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_{k,\varepsilon}} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{k,1}}\\ \mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}} & \xrightarrow{=} & \mathcal{M}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{ord}}\end{array}$$

を得たことになる．ここで $\varphi_{k,1}$ は (従って $\varphi_{k,\varepsilon}$ も) 単射である．$\varphi_{k,1}$ の全射性を示すのがステップ (1-c) の目標である．

2.4. **ステップ (1-c).** 定理 2.19 の結果を受け，これ以降 χ は W 上自明な (つまり法 $N\mathbf{p}$ の) 偶指標とする．これは §7.1 の冒頭に登場した Λ-adic forms の定義と合致している[9]．$\varphi_{k,1}$ が全射であることは次の命題から従う：

命題 2.20 (Theorem 7.3.3; §7.3, p.215 の前半の主張)**.** $\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ を位数 $p^{r(\varepsilon)}$ の指標とし，$f\in\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O}[\varepsilon])$ を重さ $k\geq 1$ の古典的モジュラー形式とする．このときある $F\in\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon)$ が存在して $(\varepsilon_*F)(u^k-1)=f$ となる．さらに f が ordinary なら $F\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon)$ とできる．

Proof. $E'(X;q)\in\Lambda[[q]]$ を

$$E'(X;q)=\left\{2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)\right\}^{-1}XE(\mathbf{1}_1,\mathbf{1}_1;1)(X;q)$$

で定める．$2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)$ は p 進単数だから $E'(X;q)\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(1,\mathbf{1}_1,\Lambda)$ となる．また，$2^{-1}(u^s-1)\zeta_p(1-s)$ の $s=0$ での値が $2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)$ であることを用いると $E'(0;q)=1$ となる．$F=f*E'(X;q)$ とおくと整数 $j\geq k+1$ に対し

$$\begin{aligned}F(u^j-1)&=fE'((\varepsilon\chi\omega^{-k})^{-1}(u)u^{j-k}-1;q)\\&=f\left\{2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)\right\}^{-1}(\varepsilon^{-1}(u)u^{j-k}-1)E(\mathbf{1})(\varepsilon^{-1}(u)u^{j-k}-1)\\&=f\left\{2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)\right\}^{-1}(\varepsilon^{-1}(u)u^{j-k}-1)\\&\quad\times\left\{E_{j-k}(\varepsilon^{-1}\omega^{-j+k})(z)-(\varepsilon^{-1}\omega^{-j+k})(p)p^{j-k-1}E_{j-k}(\varepsilon^{-1}\omega^{-j+k})(pz)\right\}\\&\in\mathcal{M}_j(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}),\chi\omega^{-j};\mathcal{O}[\varepsilon])\end{aligned}$$

となるから $F\in\mathbf{M}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon)$．また

$$(\varepsilon_*F)(u^k-1)=F(\varepsilon(u)u^k-1)=fE'(0;q)=f$$

となるから，この F が所望の元である．さらに f が ordinary なら，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda_\varepsilon)$ の元 $F|e$ が $(\varepsilon_*(F|e))(u^k-1)=((\varepsilon_*F)|e)(u^k-1)=f|e=f$ を満たす． □

[9] 正確には $N=1$ の場合に §7.1 の Λ-adic forms の定義と一致する．

注意 2.21. 上の証明を見ると，f が cusp form なら $F \in \mathbf{S}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)$, ordinary な cusp form なら $F \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)$ とできることも分かる．

ステップ (1-c) の議論により，任意の整数 $k \geq 1$ について，

$$\varphi_{k,\varepsilon} : \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)/P_{k,\varepsilon}\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon) \to \mathcal{O}[\varepsilon][[q]]; F \mapsto F(\varepsilon(u)u^k - 1)$$

の像が $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon}$ を含むことが分かった．

2.5. **ステップ (2).** このステップの目標は次の定理の証明である：

定理 2.22 (定理 2.2 の再掲)**.** $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ を W 上自明な (すなわち法 $N\mathbf{p}$ の) 偶指標，$\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を $\ker(\varepsilon) = W^{p^{r(\varepsilon)}}$ なる位数有限の指標とする．このとき任意の整数 $k \geq 2$ について，対応 $\varphi_{k,\varepsilon}(F) = F(\varepsilon(u)u^k - 1)$ が以下の等式を導く：

$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)) = \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} := \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]),$$
$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)) = \mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} := \mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon]).$$

2.5.1. *コホモロジー群への移行.* ステップ (1) を踏まえると，十分大きな重さ k については定理 2.22 が成り立つ，すなわち

$$\mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon},\ \ \mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon}$$

が成り立っている．さらにステップ (1-c) より，任意の整数 $k \geq 2$ に対し包含関係

$$\varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)) \supset \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon},\ \ \varphi_{k,\varepsilon}(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda_\varepsilon)) \supset \mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon}$$

がある．よって任意の $k \geq 2$ に対し $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{2,\varepsilon}$ を示せばよい (任意の $k \geq 2$ について

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}[\varepsilon]}\mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} + \#(A^{\mathrm{ord}}_k(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k}))$$

であり，右辺の第 2 項は k と ε に依らないので[10]，cusp forms に対する主張もこれから従う)．この目的のもとでは ε の像が $\mathcal{O}$ に含まれると仮定して一般性を失わない．Eichler-Shimura 同型より $n = k - 2$ とすると

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} + \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), L(n, \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O})) \tag{2.3}$$

となることに注意しておく (Theorem 6.3.3; §6.3, p.180).

2.5.2. *標数 0 から標数 p への移行.* (2.3) の右辺の階数の計算を行うにあたり，Hecke 作用素 $T(p)$ の振る舞いの観察が重要になるが，そのために有限体上に話を持ち込む．ϖ を $\mathcal{O}$ の素元の一つとし，$\mathbb{F} = O/\varpi O$ を $\mathcal{O}$ の剰余体とする．$\Gamma_0(N\mathbf{p})$ の正規部分群 Δ を，Δ が torsion-free, かつ指数 $[\Gamma_0(N\mathbf{p}) : \Delta]$ が p と互いに素になるように取る．

注意 2.23. $N\mathbf{p} \geq 5$ なら $\Delta = \Gamma_1(N\mathbf{p})$ がこれらの条件を満たす．$p = 3$ のとき $\Gamma_1(3)$ は torsion-free でない．$p = 2$ のとき $\Gamma_1(4)$ は torsion-free だが $[\Gamma_0(4) : \Gamma_1(4)] = 2$ が $p = 2$ と互いに素でない[11]．

[10] この証明を Appendix B に記した．この値は $\Gamma_1(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)})$ の "不分岐な" カスプの個数 ([H86b] の Lemma 5.1 参照) を，nebentype $\varepsilon\chi\omega^{-k}$ を加味して適当に調整したものである．

[11] [LFE] では Theorem 7.3.3 の直前から証明の終わりまで $p \neq 2, 3$ が仮定されているが，これは群コホモロジーの解析を簡略化するための技術的な仮定であり，実際は不要である．$N = 1$ かつ $p = 2, 3$ の場合については §7.3, pp. 217–218 に補足説明があるので参照されたい．

補題 2.24. M を $\Gamma_0(N\mathbf{p})$ が作用する $\mathcal{O}$-加群とする．任意の整数 $\beta \geq 0$ と $q \geq 0$ に対し，制限写像 $\mathrm{Res}^q : H^q(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) \to H^q(\Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)$ が次の同型を誘導する：

$$H^q(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) \cong H^0(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), H^q(\Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)).$$

Proof. 各 $q \geq 0$ について，写像

$$\mathrm{Tr}^q : H^q(\Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) \to H^q(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)$$

で，$\mathrm{Tr}^q \circ \mathrm{Res}^q = [\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta) : \Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta)] \cdot \mathrm{id}_{H^q(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)}$ を満たすものがある[12]．指数 $[\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta) : \Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta)]$ は，Δ の取り方から $\mathcal{O}$ の単数である．よって Res^q は単射． □

特に $q = 2$ のとき $\Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta)$ が torsion-free だから Proposition 6.1.1 (§6.1, p.162) を適用して $H^2(\Delta \cap \Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) = 0$. 補題 2.24 より $H^2(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) = 0$ が結論できる．指標 $\psi : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^\beta\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ と整数 $n \geq 0$ に対し $M = L(n, \psi; \mathcal{O})$ とするとき，短完全列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\times\varpi} M \xrightarrow{\mathrm{mod}\ \varpi} M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F} \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

が誘導するコホモロジー群の間の長完全列

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) &\xrightarrow{\times\varpi} H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) \\ \xrightarrow{\mathrm{mod}\ \varpi} H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}) &\longrightarrow H^2(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) = 0 \end{aligned}$$

により同型

$$H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F} \cong H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F})$$

を得る．よって以下では $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F} = L(n, \psi, \mathbb{F})$ のコホモロジーを考える．Theorem 7.2.2 の証明 (§7.2, p.204) と同様の議論により，写像

$$i : L(n, \psi; \mathbb{F}) \to L(0, \psi\omega^n; \mathbb{F}); P(X, Y) \mapsto P(1, 0)$$

は $\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta)$-加群の準同型で，ordinary なコホモロジー群の間に同型

$$i_* : H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), L(n, \psi; \mathbb{F})) \cong H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), L(0, \psi\omega^n; \mathbb{F}))$$

を導くことが分かる．特に $\beta = \alpha,\ n = k - 2,\ \psi = \varepsilon\chi\omega^{-k}$ のとき，体 $\mathbb{F}$ が標数 p ゆえ非自明な 1 の p 冪根を含まないことに注意すると，$\psi\omega^n = \varepsilon\chi\omega^{-2}$ を $\mathbb{F}^\times$ に値を持つ指標と見做したとき $\chi\omega^{-2}$ に等しい．この指標は法 $N\mathbf{p}$ で定まるからレベルを $N\mathbf{p}p^\alpha$ から $N\mathbf{p}$ まで下げることができ，結局 i_* が同型

$$H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), L(n, \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathbb{F})) \cong H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}), L(0, \chi\omega^{-2}; \mathbb{F}))$$

を与える．

2.5.3. Hecke 作用素 $T(p)$, 階数と次元の計算.

補題 2.25. $H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)$ は $\mathcal{O}$-torsion を持たない．特に

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M) = \dim_{\mathbb{F}} H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\alpha), M \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}).$$

[12] §6.3, pp.177–178 に $q = 1$ の場合の Tr^q の定義が書かれている．

Proof. 短完全列 (2.4) がコホモロジー群の短完全列

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{F} & \xrightarrow{i} & H^0(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{F}) \\ & \longrightarrow & H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)[\varpi] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を誘導する．ただし $H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)[\varpi]$ は $H^1(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M)$ 上の ϖ 倍写像の核を表す．よって補題を示すには $H^0_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{F}) = 0$ を示せば十分．定義から整数 $0 \le j \le n$ に対し

$$X^{n-j}Y^j|T(p) = \sum_{i=0}^{p-1}(X+iY)^{n-j}(pY)^j.$$

$\mathbb{F}$ の標数が p だから，$j \neq 0$ なら $X^{n-j}Y^j|T(p) = 0$. $j = 0$ のとき

$$X^n|T(p) = \sum_{i=0}^{p-1}(X+iY)^n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\sum_{i=0}^{p-1} i^m\right)X^{n-m}Y^m$$

であり，$m = 0$ のとき $\sum_{i=0}^{p-1} i^m = p$ だから $X^n|T(p)$ に X^n の項は現れない．よって $X^n|T(p)^2 = 0$ となる．ゆえに $H^0_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^\beta), M\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{F}) = 0$. □

階数を比較して

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} - \#(A^{\mathrm{ord}}_k(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k})) \\
&= \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} + \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k,\varepsilon} \\
&= \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), L(n, \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O})) \\
&= \dim_{\mathbb{F}}H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), L(n, \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathbb{F})) \\
&= \dim_{\mathbb{F}}H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}), L(0, \chi\omega^{-2}; \mathbb{F})) \\
&= \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}), L(0, \chi\omega^{-2}; \mathcal{O})) \\
&= \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_2(\Gamma_0(N\mathbf{p}), \chi\omega^{-2}; \mathcal{O}) + \mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_2(\Gamma_0(N\mathbf{p}), \chi\omega^{-2}; \mathcal{O}) \\
&= 2\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_2(\Gamma_0(N\mathbf{p}), \chi\omega^{-2}; \mathcal{O}) - \#(A^{\mathrm{ord}}_2(N\mathbf{p}) \cap A(N\mathbf{p}, \chi\omega^{-2}))
\end{aligned}$$

となる[13]．これにて定理 2.22 の証明が完結した．

3. The universal Hecke algebras, duality and Hecke eigenforms

この節では §7.3, pp. 218–221 の内容を解説する．まず universal ordinary Hecke algebras を古典的な場合に倣って定義し，その半単純性を議論する．その後 universal ordinary Hecke algebras が Λ-adic forms の空間の双対になっていることを観察する．この双対を通じて universal ordinary Hecke algebras の半単純性を Λ-adic forms の言葉で言い換えると，正規化された Λ-adic Hecke 固有形式が現れることを最後に見る．

3.1. **Ordinary Hecke algebra.** 前節までと同様，$N \ge 1$ を p と互いに素な整数，χ を法 $N\mathbf{p}$ の偶指標とする．

定義 3.1. tame level N, 指標 χ の **ordinary Hecke algebra** $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ とは，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ の Hecke 作用素 $T(n) \in \mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が Λ 上生成する $\mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))$ の Λ-部分代数である．Λ-adic cusp forms の空間についても同様にして $\mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))$ の Λ-部分代数 $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ を定義する．Λ-adic forms の空間の場合と同様に，tame level N, 指標 χ, べき級数環 Λ について曖昧さがないときは単に $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}} = \mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ などと書く．

[13] 繰り返すが，$\#(A^{\mathrm{ord}}_k(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k}))$ は $k \ge 2$ と ε によらない (Appendix B).

記法 3.2. Λ-代数 A に対し $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)=\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)\otimes_\Lambda A$ と書く．$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}$ についても同様．

まず $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}$ の環としての性質に着目したい．話をなるべく平易に説明するため，ひとまず tame level N が 1 の場合に成り立つ性質を紹介する．

定理 3.3 (Theorem 7.3.4; §7.3, p.218)**.** $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)$ は Λ-加群として有限生成で torsion-free，かつ被約である．特に $\mathbf{L}$ を Λ の商体とすると $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\mathbf{L})$ は半単純である．$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)$ についても同様の主張が成り立つ．

Proof. 有限生成自由 Λ-加群 $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}=\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)$ の階数を r とすると，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ の Λ-基底を一つ固定することにより $\mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}})$ は $M_r(\Lambda)$ と同一視できる．この同一視を用いれば，Control Theorem により任意の整数 $k\geq 2$ に対し

$$\mathrm{End}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}})\otimes_\Lambda \Lambda/P_k\Lambda=M_r(\Lambda/P_k\Lambda)\cong \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O}))$$

となり，$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}\otimes_\Lambda\Lambda/P_k\Lambda$ の右辺での像は $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ の Hecke 環 $\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ に等しい．Theorem 5.3.2 (§5.3, p.145) と Corollary 7.2.1 (§7.2, p.208) から，$\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ が被約であることが従う．これは $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}$ の冪零根基が $\cap_{k\geq 2}P_kM_r(\Lambda)=\{0\}$ に含まれることを意味する． □

この証明において，重要な事柄は Control Theorem と $\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})$ の被約性の 2 点である．前者が一般の tame level でも成り立つことは第 2 節で証明した通りだが，後者については一般の N で成り立つとは限らないので修正が必要になる．

その修正とは，$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ をその適当な商 $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ で置き換えるものであり，古典的なモジュラー形式の空間で p-stabilized newforms (p. 538 of [Wil]) が生成する部分空間に忠実に作用する Hecke 環の商を考えることに相当する．修正の詳細は [H86a] の pp. 250–252 及び p. 265 に譲ることにして，ここでは $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ の雰囲気を大まかに説明するに留めたい．

$k\geq 1$ を整数，$C\geq 1$ を N の約数で χ が法 $C\mathbf{p}$ で定義されるものとする．N/C の正の約数 t に対し，写像

$$[t]:\mathcal{M}_k(\Gamma_0(C\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)\to\mathcal{M}_k(\Gamma_0(Ct\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K);\ f(z)\mapsto f(tz)$$

を考える．ただし K は $\mathcal{O}$ の商体である．$[t]$ は単射準同型で，cusp forms $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(C\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ を $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(Ct\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ に移す．$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ の N-oldforms の部分空間を

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-old}}=\sum_{\substack{C|N,C\neq N\\ \chi \bmod C\mathbf{p}}}\sum_{1\leq t|N/C}\mathcal{S}_k(\Gamma_0(C\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)|[t]$$

で定める．この空間は $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ の Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ で閉じている．Petersson 内積に関する $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-old}}$ の直交補空間を

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}\subset\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$$

で表し，$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ の N-newforms の部分空間と呼ぶ．N-newforms の空間も Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ で保たれる．モジュラー形式の空間については，N-newforms のなす部分空間 $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}$ を

$$\sum_{(\psi_1,\psi_2,t)\in A_k(N\mathbf{p}),N|v_1v_2}K\cdot E_k(\psi_1,\psi_2;t)\oplus\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}$$

で定める[14] ($A_k(N\mathbf{p})$ の定義は補題 2.10 参照)．この空間は，$\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ の Hecke 作用素 $T(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ に関して閉じている[15]．

A を Λ-代数かつ整域とする．$\mathbf{K}$ を A の商体として

$$\mathbf{m}(N,\chi,A)=\{F\in\mathbf{M}(N,\chi,\mathbf{K})\mid a(n,F)\in A,\ \forall n\geq 1\}$$

とおく．右辺の $\mathbf{M}$ を $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ に置き換えたものを $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ とする．Hecke 作用素の定義から，$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ が $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ に作用する．

定義 3.4. Λ-adic newforms of tame level N の空間 $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ とは，任意の整数 $k\geq 2$ に対して

$$F(u^k-1)\in\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)\cap\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}$$

を満たす Λ-adic form $F\in\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ からなる部分空間である．Λ-adic cusp forms についても同様に $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ を，

$$F(u^k-1)\in\mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O})\cap\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}$$

を満たす $F\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ がなす部分空間と定める．

注意 3.5. $N=1$ の時 $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}$ が $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)$ に一致し，従って $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ が $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ に一致することに注意されたい．

Λ-adic forms の特殊化と Hecke 作用素が両立すること (第 1.2 節) を踏まえれば，$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ は $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ の作用で閉じている．従って $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ を $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ の零化イデアルで割った環 は $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ に忠実に作用する．この商環が $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ である (cusp forms についても同様に $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ が得られる)．

$N=1$ のとき $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}=\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)$, $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}=\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)$ となる．定理 3.3 の主張で $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\Lambda)$ を $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ 及び $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}$ に置き換えたものが，一般の tame level N について正しい (Corollary 3.3; p. 250 of [H86a])．

3.2. **Ordinary Hecke algebra と双対性.** 次に $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}$ と $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}$ の間の双対について議論したい．A を Λ-代数とすると，冪等作用素 $e:\mathbf{M}(N,\chi,A)\to\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ が係数拡大により定義される．A 上の双線形写像

$$\langle\ ,\ \rangle:\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)\times\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)\to A;(H,F)\mapsto a(1,F|H)$$

を考える．このとき次が成り立つ：

定理 3.6 (Corollary 2.3; p. 248 of [H86a][16])**.** A が $\mathbf{L}$ の拡大体，又は $\mathbf{L}$ の有限次拡大体の中での Λ の整閉包なら，上の双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle$ が以下の同型を誘導する：

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),A)\cong\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),$$
$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),A)\cong\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),$$
$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),A)\cong\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),$$
$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),A)\cong\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A).$$

特に $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$, $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ は有限生成自由 A-加群である．

[14] $N\nmid v_1v_2$ なる $(\psi_1,\psi_2,t)\in A_k(N\mathbf{p})$ について $E_k(\psi_1,\psi_2;t)$ を考えれば，N-oldforms の部分空間 $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-old}}$ も同様に定義できる．

[15] さらに $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};K)^{N\text{-new}}$ の上で $T(n)$, $p\nmid n$ は同時対角化可能．

[16] $N=1$ の場合は [LFE] Theorem 7.3.5 (§7.3, p. 218) そのものである．

この定理の証明では，$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ の A-加群としての性質に関する以下の命題を認める[17]．命題 3.7 の証明は Appendix C に記した．

命題 3.7. $\mathbf{K}$ を $\mathbf{L}$ の有限次拡大体，A を $\mathbf{K}$ の中での Λ の整閉包とする．$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ は自由 A-加群で，階数が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$ のそれに一致する．

定理 3.6 の証明を，tame level が 1 の場合に説明する．N が一般の場合の証明は [H86a] の Theorem 2.2 (p. 247) にあるが，手筋は $N=1$ の場合と変わらない．

Proof. 以下，$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)=\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,A)$, $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)=\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,A)$ などと略記する．まず $\langle\ ,\ \rangle$ の非退化性を示す．$F\in\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$ が任意の $H\in\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$ に対して $a(1,F|H)=0$ を満たすと仮定する．特に $H=T(n)$ とすると

$$0=a(1,F|T(n))=a(n,F)$$

だから $F=a(0,F)\in\mathbf{K}$ は定数．従って $F=0$ (cf. 補題 C.2 の証明)．逆に $H\in\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$ が任意の $F\in\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$ に対し $a(1,F|H)=0$ を満たすなら，

$$a(n,F|H)=a(1,F|HT(n))=a(1,F|T(n)H)=0$$

がすべての整数 $n\geq 1$ に対し成立．すなわち $F|H\in\mathbf{K}$ は定数で，先と同様の理由により $F|H=0$. これが任意の F について成り立つから $H=0$. これにて非退化性が証明できた．特に A が体のとき定理 3.6 そのものが証明できた．

次に A が体とは限らない場合に定理を示す．まず

$$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)\to\mathrm{Hom}_A(\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)$$

の全射性を示す．λ を右辺の元とする．$\mathbf{K}$ 上に係数拡大をして $\mathbf{K}$-線形写像

$$\lambda\otimes_A\mathrm{id}_{\mathbf{K}}:\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{K})\to\mathbf{K}$$

を得る．$\mathbf{K}$ 上では双対性が成り立つから $\lambda\otimes_A\mathrm{id}_{\mathbf{K}}$ に対応する $F\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi,\mathbf{K})$ が存在する．特に各整数 $n\geq 1$ について $a(n,F)=a(1,F|T(n))=\lambda(T(n))\in A$ だから $F\in\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)$. これで全射性が示せた．次に

$$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,A)\to\mathrm{Hom}_A(\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,A),A)$$

が全射であることを示す．$A=\Lambda$ として一般性を失わない．以下 $\mathbf{H}=\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ と略記する．Λ-加群 X に対し $X^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(X,\Lambda)$ とおく．非退化性より Λ-加群の自然な単射準同型 $\mathbf{H}\to\mathbf{H}^{**}=\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda),\Lambda)$ がある．$\mathbf{N}=\mathbf{H}^{**}/\mathbf{H}$ とおき $\mathbf{N}=0$ を示したい．$\mathbf{L}$ 上で双対性が成り立つから $\mathbf{N}\otimes_\Lambda\mathbf{L}=0$. また，$\Lambda_P$ を Λ の高さ 1 の素イデアル P での局所化とすると Λ_P は単項イデアル整域で，$\mathbf{H}$ が Λ-torsion を持たない有限生成 Λ-加群だから $\mathbf{H}\otimes_\Lambda\Lambda_P$ は有限生成自由 Λ_P-加群．特に $\mathbf{N}\otimes_\Lambda\Lambda_P=0$. これらの事実から $\mathbf{N}$ は集合として有限であることが分かる．さらに命題 3.7 より $\mathbf{H}^{**}$ は自由加群だから $\mathbf{H}^{***}=\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi,\Lambda)$ となる．よって特にすべての整数 $k\geq 2$ に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathbf{H}^{**}/P_k\mathbf{H}^{**},\mathcal{O})\cong\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}/P_k\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}),\chi\omega^{-k};\mathcal{O}),\mathcal{O}).\tag{3.1}$$

一方で $\mathbf{N}$ の定義から短完全列

$$0\longrightarrow\mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{H}^{**}\longrightarrow\mathbf{N}\longrightarrow 0$$

[17] Theorem 7.3.5 の証明の中で，命題 3.7 は当然のように用いられており，命題や補題などの形で明示的に言及されていないが，筆者が自明でないと判断し，この稿では命題として記した．

があり，これを素イデアル P_k で剰余して完全列

$$\mathbf{H}/P_k\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}^{**}/P_k\mathbf{H}^{**} \longrightarrow \mathbf{N}/P_k\mathbf{N} \longrightarrow 0$$

を得る．ここで $\mathbf{H}/P_k\mathbf{H} \to \mathbf{H}^{**}/P_k\mathbf{H}^{**}$ の像が $\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ だから短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}) \longrightarrow \mathbf{H}^{**}/P_k\mathbf{H}^{**} \longrightarrow \mathbf{N}/P_k\mathbf{N} \longrightarrow 0$$

がある．これより完全列

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathbf{H}^{**}/P_k\mathbf{H}^{**}, \mathcal{O}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}), \mathcal{O}) \\ \longrightarrow \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathbf{N}/P_k\mathbf{N}, \mathcal{O}) &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathbf{H}^{**}/P_k\mathbf{H}^{**}, \mathcal{O}) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

を得る．(3.1) と (3.2) を合わせると $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathbf{N}/P_k\mathbf{N}, \mathcal{O}) = 0$ が従う．$\mathbf{N}/P_k\mathbf{N}$ は有限 $\mathcal{O}$-加群だから $\mathcal{O}/\varpi^r\mathcal{O}$ たちの直和である (ϖ は $\mathcal{O}$ の素元)．可換環論の一般論から $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}/\varpi^r\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/\varpi^r\mathcal{O}$ となるから $0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\mathbf{N}/P_k\mathbf{N}, \mathcal{O}) = \mathbf{N}/P_k\mathbf{N}$．中山の補題より $\mathbf{N} = 0$. □

3.3. **正規化された Hecke 固有形式.** 以降では，定理 3.3 で観察した universal ordinary Hecke algebras の半単純性を，定理 3.6 を通して Λ-adic forms の言葉で言い換えたい．

定義 3.8. A を定理 3.6 と同様とする．$F \in \mathbf{m}(N, \chi, A)$ が **Hecke 固有形式**であるとは，F が Hecke 作用素 $T(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の同時固有ベクトルであることをいう．

Λ を適切に拡大すると，実は Λ-adic forms の空間は Hecke 固有形式で生成される．このことを観察しよう．定理 3.3 より $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{L})^{\mathrm{new}}$ は半単純な $\mathbf{L}$-代数だから有限個の $\mathbf{L}$ の有限次拡大体の直積である．よって $\mathbf{L}$ の有限次拡大体 $\mathbf{K}$ を適切に選べば $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}} = \prod \mathbf{K}$ (有限個の $\mathbf{K}$ のコピーの直積) とできる．このような $\mathbf{K}$ を一つ取り，$\mathbf{I}$ を $\mathbf{K}$ の中での Λ の整閉包とする．

定理 3.9 (Theorem 7.3.6; §7.3, p.220)**.** $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$, $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ はそれぞれ Hecke 固有形式からなる $\mathbf{K}$-基底を持つ．さらに $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ のそのような $\mathbf{K}$-基底 $\{F_i\}$ を正規化して $a(1, F_i) = 1$ とすると，$F_i \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})^{\mathrm{new}}$ となる．

Proof. $\lambda_i : \mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}} \to \mathbf{K}$ を i 番目の射影とする．$\mathbf{K}$ 上の双対性で，λ_i と自然な全射 $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K}) \to \mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ の合成に $F_i \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})$ が対応しているとする．このとき $\{F_i\}$ が所望の $\mathbf{K}$-基底となることを示す．まず，F_i が newforms の空間 $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ に属していることを観察する．整数 $k \geq 2$ を任意に一つ固定し，F_i の重さ k での特殊化が

$$\varphi_{k,1}(F_i) = f|e + g|e,$$

$f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; K)^{N\text{-new}}, g \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; K)^{N\text{-old}}$ と書けるとする．$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})$ の F_i への作用が $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ を経由することはすなわち，任意の $h \in \mathbf{H}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; K)$ について $(g|e)|h = 0$ となることを意味する．特に $h = T(1)$ とすれば $g|e = 0$ となる．よって $\varphi_{k,1}(F_i) = f|e$ が示せた．

次に，λ_i が射影ゆえ特に $\mathbf{K}$-代数の準同型であることに注意すると，整数 $m, n \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} a(m, F_i|T(n)) = a(1, F_i|T(n)T(m)) &= \lambda_i(T(n)T(m)) \\ = \lambda_i(T(n))\lambda_i(T(m)) = a(1, F_i|T(n))a(1, F_i|T(m)) &= a(n, F_i)a(m, F_i) \end{aligned}$$

となる．これは $F|T(n) = a(n, F_i)F_i$ を意味するから F_i は Hecke 固有形式である．λ_i たちの取り方から $\{F_i\}$ は $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ の $\mathbf{K}$-基底となる．

最後に，$\{F_i\}$ が Hecke 固有形式からなる $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ の $\mathbf{K}$-基底で $a(1, F_i) = 1$ を満たすとする．上の計算より $a(n, F_i)$ は F_i の $T(n)$ に関する固有値になっている．$\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ の Λ-基底を一つ固定すれば $T(n)$ は Λ-係数の行列で表現される．よって $T(n)$ の固有値は Λ-係数モニック多項式の根で，かつ $\mathbf{K}$ の元だから $a(n, F_i) \in \mathbf{I}$. □

この証明から読み取れるように，定理 3.6 の同型

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A),A)\cong \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,A)$$

の下で，A-代数の準同型と，正規化された Hecke 固有形式が対応している．

注意 3.10. $N=1$ のとき，注意 3.5 の後ろで説明したように，$\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ と $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\mathbf{K})$ が一致する．従って定理 3.9 は，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(1,\chi,\mathbf{K})$ が Hecke 固有形式からなる $\mathbf{K}$-基底を持つことを意味している．Λ-adic cusp forms の空間についても同様．

注意 3.11. 定理 3.9 の正規化された Hecke 固有形式を **Λ-adic newform of tame level** N という．このような固有形式がどのように得られるか説明する．$C\geq 1$ が N の約数で，χ が法 $C\mathbf{p}$ で定まるとき，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(C,\chi,\mathbf{K})$ が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})$ に含まれる．よって ordinary Hecke algebra の自然な全射 $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})\to\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(C,\chi,\mathbf{K})$ が定まる．また，定義から tame level C の全射 $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(C,\chi,\mathbf{K})\to\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(C,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ がある．これら 2 つを合成して $\mathbf{K}$-代数の全射準同型 $\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})\to\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(C,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ を得る．従って，$\mathbf{K}$ 上の双対で $\mathbf{K}$-代数の準同型 $\lambda:\mathbf{H}^{\mathrm{ord}}(C,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}\to\mathbf{K}$ に対応する正規化された Hecke 固有形式 F は，Λ-adic newform of tame level C であり，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})$ に属する．

一般に，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})$ の正規化された固有形式は，このような C と χ から得られた F たちを用いて表される．詳細は [H86a] §3 (特に Corollaries 3.3 and 3.7) を参照されたい．

3.4. **数論的点とモジュラー形式の p-進族.** 既に見たように，Λ-adic form を一つ与えることは重さ $k\geq 2$ でパラメータ付けられた保型形式の族 $\{f_k\}$ で，Fourier 係数 $a(n,f_k)$ が k について p-進的に補間されるものを与えることに相当する．同じように $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})$ の元を一つ与えると，「数論的点」の集合によりパラメータ付けられるモジュラー形式の p-進族が得られる．

$k\geq 2$ を整数，$\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ を位数有限の指標とする．$P_{k,\varepsilon}$ を $\varepsilon(u)u^k-1$ の $\mathcal{O}$ 上の最小多項式とすると $\ker(\varphi_{k,\varepsilon})=P_{k,\varepsilon}\Lambda$ である．$\mathbf{I}$ は Λ の整拡大だから，$\mathbf{I}$ の素イデアル P で $P\cap\Lambda=P_{k,\varepsilon}\Lambda$ なるものが存在する．このとき $\mathbf{I}/P$ は $\Lambda/P_{k,\varepsilon}\Lambda\cong\mathcal{O}[\varepsilon]$ の整拡大になり，$\mathbf{I}/P$ を (non-canonical に) $\overline{\mathbb{Q}}_p$ へ埋め込めば，$\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi:\mathbf{I}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ は $\varphi_{k,\varepsilon}:\Lambda\to\mathcal{O}[\varepsilon]$ の $\mathbf{I}$ への延長になっている．逆に $\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi:\mathbf{I}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ で Λ への制限が $\varphi_{k,\varepsilon}$ に一致するものが与えられたとき，$P=\ker(\varphi)$ とおくと $P\cap\Lambda=P_{k,\varepsilon}\Lambda$ となる．このような φ に対し

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})\otimes_{\mathbf{I}}\mathbf{I}/P&\cong(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)\otimes_{\Lambda}(\Lambda/P_{k,\varepsilon}\Lambda))\otimes_{\mathcal{O}}\mathbf{I}/P\\&\cong\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\varphi(\mathbf{I}))\end{aligned}$$

となる．別の言い方をすれば，$F\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})$ をテンソル積の定義に基づいて

$$F=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iF_i\quad(\lambda_i\in\mathbf{I},\ F_i\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda))$$

と書いたとき $\varphi(F)=\sum_i\varphi(\lambda_i)F_i(\varepsilon(u)u^k-1)\in\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\varphi(\mathbf{I}))$ となる．以上の考察を受けて次の定義をする：

定義 3.12. $\mathcal{O}$-代数の準同型 $P:\mathbf{I}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ が**数論的点** ARITHMETIC POINT であるとは，整数 $k\geq 2$ と位数有限の指標 $\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ が存在して P の Λ への制限が $\varphi_{k,\varepsilon}$ に一致することをいう．$\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ で $\mathbf{I}$ の数論的点の集合を表す[18]．

注意 3.13. $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ の上の同値関係 $\sim$ を

$$P\sim P'\iff\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)\text{ が存在して }P'=\sigma\circ P$$

[18] §7.3, p. 220 では $\mathcal{A}(\mathbf{I})$ で数論的点の集合を表している．

で定義する．$\mathcal{A}(\mathbf{I})=\left\{\ker(P)\mid P\in\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})\right\}$ とおくと，対応 $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})\ni P\mapsto\ker(P)\in\mathcal{A}(\mathbf{I})$ が全単射 $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})/\sim\,\cong\mathcal{A}(\mathbf{I})$ を導く．この事実に基づき，$\mathbf{I}/\ker(P)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込み方を気にしないときは，$\mathcal{A}(\mathbf{I})$ の元を数論的点として扱うことがある．また，記号を濫用して $\mathcal{O}$-代数の準同型 $P\in\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ の核も P で表すことがある．

以下，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})$ の元を **I-adic form** と呼ぶ．定理 2.2 (Control Theorem) により，**I**-adic form $F\in\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})$ に対し，$\{P(F)\}_{P\in\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})}$ は，数論的点の集合 $\mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ でパラメータ付けられた (重さ 2 以上の) モジュラー形式の族をなす．

定理 3.14 (Corollary 3.7; p. 253 of [H86a] ($k\geq 2$), Theorem 1.4.1; p. 546 of [Wil] ($k=1$ も含めて)[19])**.** $f\in\mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\overline{\mathbb{Q}})^{N\text{-new}}$ を重さ $k\geq 1$ の正規化された Hecke 固有形式とする．このとき，ある Λ の整拡大 $\mathbf{I}$, $\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi:\mathbf{I}\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ と正規化された Hecke 固有形式 $F\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})^{\mathrm{new}}$ が存在して $f=\varphi(F)$ となる．

Proof. f は正規化された Hecke 固有形式だから，その Hecke 体 $\mathbb{Q}(f)$ は代数体で，任意の整数 $n\geq 1$ に対し $a(n,f)$ は $\mathbb{Q}(f)$ の整数環の元である．従って $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}(f)$ を含む $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環とすると $f\in\mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O})^{N\text{-new}}$ となる．$\mathcal{O}$ 上の双対性により f に対応する $\mathcal{O}$-代数の準同型を $\lambda_0:\mathbf{h}=\mathbf{h}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{\alpha}),\varepsilon\chi\omega^{-k};\mathcal{O})^{N\text{-new}}\to\mathcal{O}$ で表す．記号を濫用して $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}\to\mathbf{h}$ と λ_0 の合成も λ_0 で表す．一方で命題 2.20 より $(\varepsilon_*F)(u^k-1)=f$ なる $F\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)$ がある．この F に双対性で対応する Λ-加群の準同型を $\lambda_F:\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)\to\Lambda$ で表すと，左下の可換図式を得る．右下の図式が可換になるような Λ の整拡大 $\mathbf{I}$ と環準同型 φ を見つけたい：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda) \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "\lambda_F"'] & \mathcal{O} \\
\Lambda \arrow[ur, "\varphi_{k,\varepsilon}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}} \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathcal{O} \arrow[r, hook] & \overline{\mathbb{Q}}_p \\
\mathbf{I} \arrow[urr, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

もしこのような $\mathbf{I}$ と φ が存在すれば $\ker(\lambda)\subset\ker(\lambda_0)$ が成り立つ．そこで $\mathfrak{p}$ を $\ker(\lambda_0)$ に含まれる極小素イデアルの一つとすると，

$$\mathbf{I}'=\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}/\mathfrak{p}$$

は Krull 次元 2 の整域で，その商体 $\mathbf{K}$ は $\mathbf{L}$ の有限次拡大体になっている．$\mathfrak{p}$ の取り方から，λ_0 が自然な全射準同型 $\lambda':\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}}\to\mathbf{I}'$ と環準同型 $\varphi':\mathbf{I}'\to\mathcal{O}$ に分解する (右下の図式参照). $\mathbf{I}$ を $\mathbf{K}$ の中での Λ の整閉包とすると $\mathbf{I}'\subset\mathbf{I}$ で，$P\cap\mathbf{I}'=\ker(\varphi')$ を満たす $\mathbf{I}$ の素イデアル P が取れる．$\mathbf{I}/P$ を (non-canonical に) $\overline{\mathbb{Q}}_p$ に埋め込めば，$\mathcal{O}$-代数の準同型 $\varphi:\mathbf{I}\twoheadrightarrow\mathbf{I}/P\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$ は $\varphi':\mathbf{I}'\to\mathcal{O}$ の $\mathbf{I}$ への延長となる (左下の可換図式). λ を λ' と包含 $\mathbf{I}'\subset\mathbf{I}$ の合成とすれば $\lambda_0=\varphi\circ\lambda$ が成り立つ (右下の可換図式):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} \arrow[r, hook] & \mathbf{I}/P \arrow[r, hook] & \overline{\mathbb{Q}}_p \\
\mathbf{I}' \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[r, hook] & \mathbf{I} \arrow[u, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)^{\mathrm{new}} \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "\lambda'"'] & \mathcal{O} \arrow[r, hook] & \overline{\mathbb{Q}}_p \\
\mathbf{I}' \arrow[ur, "\varphi'"'] \arrow[r, hook] & \mathbf{I} \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

[19] $N=1$ の場合は Theorem 7.3.7 (§7.3, p.221).

よって $\lambda_F \otimes_\Lambda \mathrm{id}_{\mathbf{I}} = \lambda$ は $\mathbf{I}$-代数の準同型，すなわち $F \in \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})^{\mathrm{new}}$ は正規化された Hecke 固有形式である．各 $n \geq 1$ に対し

$$\varphi(a(n, F)) = (\varphi \circ \lambda_F)(T(n)) = (\varphi \circ \lambda)(T(n)) = \lambda_0(T(n)) = a(n, f)$$

となるから $\varphi(F) = f$. □

注意 3.15. Theorem 7.3.7 では上記の主張と証明が，cusp form とは限らない正規化された Hecke 固有形式 $f \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \overline{\mathbb{Q}})^{N\text{-new}}$ についてもなされている．しかし f が cusp form でない場合，f の定数項 $a(0, f)$ が p-integral かどうか分からない．従って $f \in \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}p^\alpha), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ となる整数環 $\mathcal{O}$ が取れるとは限らず，命題 2.20 が適用できない．このような事情で，本稿では cusp form だけを扱った[20].

注意 3.16. [H86a] の Corollary 3.7 では，定理 3.14 より強く，このような F が f から (Galois 共役の差を除いて) 一意的に決まることも示されている．一方で [Wil] の Theorem 1.4.1 は $k = 1$ の場合も扱えるのが利点だが，この証明方法では ($k \geq 2$ の場合でも) F の一意性は分からないと，Wiles 自身が述べている ([Wil] p. 532).

4. A review on Rankin product L-functions

L-関数は通常，複素数体に値をとるが，ある範囲の整数点での特殊値 (を周期で割ったもの) が代数的数になる場合に，そのような値を，固定した埋め込みを介して $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元とみなし，p-進解析関数による補間の可能性を考える．[LFE] の §5.4 (特に Corollary 5.4.3; §5.4, p.156) で，二つの保型形式 f と h に対し，Rankin product L-関数

$$D(s, f, h) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, f)^c a(n, h) n^{-s}$$

を定義し，整数点における特殊値の代数性について考察した (^{c} は複素共役を表す). この特殊値の代数的な部分を p 進的に補間するような 2 変数 p-進 L-関数を構成するのが，§7.4 の主題である．第 4 節から第 6 節で，その構成について解説する．

4.1. The algebraic Petersson inner product.

Corollary 5.4.3 (§5.4, p.156) 及びそれに至る §5.4 の議論を思い出すと，$D(s, f, h)$ の特殊値の代数的な部分は，正則保型形式の空間に定まる Petersson 内積を用いて記述された．この内積の定義は複素関数に特有であるため，p-進類似を考えるにあたりそのまま用いることができない．そこで以下のようにして “代数的” Petersson 内積を考える．

S を保型形式からなる空間で，Noether 整域 A 上の有限生成加群であるとする．さらに Hecke 作用素 $T(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) が S に A-線形に作用しているとする．$h(S)$ を $T(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) が A 上生成する $\mathrm{End}_A(S)$ の A-部分代数とする．これらが次の三つの性質を満たしていると仮定する：

- (S1) A-加群の準同型 $f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n, f) q^n$ により S を $A[[q]]$ に埋め込める，
- (S2) (S1) により誘導される A-双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle : S \times h(S) \to A; (f, T) \mapsto a(1, f|T)$ が A-加群の同型 $S \cong \mathrm{Hom}_A(h(S), A)$ を導く，
- (S3) K を A の商体として，$h(S) \otimes_A K$ が半単純．

例 4.1. 第 1 節から第 3 節に登場した $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])^{N\text{-new}}$ と対応する Hecke 環 $\mathbf{h}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathcal{O}[\varepsilon])^{N\text{-new}}$，$\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})^{\mathrm{new}}$ と $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})^{\mathrm{new}}$ は (S1)–(S3) を満たす．

[20] [H86a] の Corollary 3.7 及び [Wil] の Theorem 1.4.1 でも，f は cusp form としている．

この設定のもと，$D = h(S) \otimes_A K, S(K) = D^* = \mathrm{Hom}_K(D, K)$ として "代数的" Petersson 内積

$$(\ , \ )_A : S(K) \times S(K) \to K$$

を定義したい．D は有限次元 K-ベクトル空間で代数の構造を持つから，体の有限次拡大と同様にして跡写像 $\mathrm{Tr}_{D/K} : D \to K$ が定義できる．仮定 (S3) により，この $\mathrm{Tr}_{D/K}$ が誘導する K-双線形写像 $D \times D \to K; (T, T') \mapsto \mathrm{Tr}_{D/K}(TT')$ は非退化で，K-ベクトル空間の同型 $i : D \cong D^*$, $i(T)(T') = \mathrm{Tr}_{D/K}(TT')$ を誘導する．

定義 4.2. K-双線形写像 $(\ , \ )_A : S(K) \times S(K) \to K$ を

$$(f, g)_A = g(i^{-1}(f)) \quad (f, g \in S(K) = D^*)$$

で定め，これを A 上の**代数的 Petersson 内積**という．

次の性質は定義から容易に確認出来る：

補題 4.3. 任意の $f, g \in S(K)$ と任意の $T \in D$ に対し $(f|T, g)_A = (f, g|T)_A$.

特に 0 でない $f \in S$ が (S2) の同型により A-代数の準同型 $\lambda : h(S) \to A$ に対応 (任意の $T \in h(S)$ に対し $\lambda(T) = a(1, f|T)$) するとき，$a(1, f) = \lambda(T(1)) = 1$ より $(f, f)_A \neq 0$ で

$$c(f, g) = \frac{(f, g)_A}{(f, f)_A} \in K \quad (g \in S(K))$$

が well-defined. この $c(f, g)$ は次のように特徴づけられる：

命題 4.4. K を (必要なら) 適当な K の有限次拡大体で置き換えて，$S(K)$ が正規化された Hecke 固有形式 $\{f_i\}$ からなる基底を持つようにできる．また，このような基底 $\{f_i\}$ は $(\ , \ )_A$ に関する直交基底で，$g \in S(K)$ を f_i たちの線形結合で表したときの f_i の係数が $c(f_i, g)$ である．

Proof. 仮定 (S3) により K を適当な有限次拡大に置き換えて $D \cong \prod_{i=1}^r K$ が成り立つようにできる．$\lambda_i : D \to K$ を i 番目の射影として，同型 (S2) により λ_i に対応する $S(K)$ の元を f_i とすると，λ_i が K-代数の準同型であることから

$$a(m, f_i|T(n)) = \lambda_i(T(n))a(m, f_i), \ \ a(1, f_i) = \lambda_i(T(1)) = 1$$

となる．よって f_i は正規化された Hecke 固有形式．さらに $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ だからある整数 $n \geq 1$ が存在して $\lambda_i(T(n)) \neq \lambda_j(T(n))$ となる．この n に対し

$$\lambda_i(T(n))(f_i, f_j)_A = (f_i|T(n), f_j)_A = (f_i, f_j|T(n))_A = \lambda_j(T(n))(f_i, f_j)_A$$

となるから $(f_i, f_j)_A = 0$. ゆえに $\{f_i\}_{i=1}^r$ は $(\ , \ )_A$ について直交である．最後の主張はこのことより明らか. □

注意 4.5. 上の証明のように $D \cong \prod_{i=1}^r K$ となっている場合，実際には $\{f_i\}$ が正規，すなわち各 i について $(f_i, f_i)_A = 1$ となることも示せる．詳細は定理 6.7 の証明を参照されたい．

$A = \mathbb{C}$ のとき，$S(K) = \mathcal{S}_k(\Gamma_0(M), \chi)$ として §5.3, p.143 で定義された Petersson 内積 $(\ , \ )_{\Gamma_0(M)}$ と今定義した代数的 Petersson 内積 $(\ , \ )_{\mathbb{C}}$ を比較する．まず $\tau_M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ M & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と置いて，$S(K)$ 上の新たな内積 $(\ , \ )_\infty$ を

$$(f, g)_\infty = (g, \tilde{f}|_k \tau_M)_{\Gamma_0(M)} \quad (f, g \in S(K))$$

と定める．ただし $\tilde{f}$ は $\tilde{f}(z) = f(-z^c)^c$ なる上半平面上の複素関数で，$f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(M), \chi)$ のとき $\tilde{f} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(M), \chi^{-1})$ となることが知られている．また，$\det(\gamma) > 0$ なる行列 $\gamma \in GL_2(\mathbb{R})$ に対し $f|_k\gamma$ は

$$(f|_k\gamma)(z) = \det(\gamma)^{k-1}(cz+d)^{-k}f(\gamma z) \quad \left(\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)$$

で定義される．行列 τ_M は同型 $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(M), \chi) \cong \mathcal{S}_k(\Gamma_0(M), \chi^{-1})$ を導くので $f \in S(K)$ に対し $\tilde{f}|_k\tau_M \in S(K)$ となり，上の定義式の右辺は意味を持つ．$f \in S(K)$ が正規化された Hecke 固有形式ならば，Proposition 5.5.1 (§5.5, p.157) よりある絶対値 1 の複素数 $W(\lambda)$ が存在して $\tilde{f}|_k\tau_M = M^{(k-2)/2}\chi(-1)W(\lambda)^c f$ となる．よって

$$(f, f)_\infty = (f, \tilde{f}|_k\tau_M)_{\Gamma_0(M)} = M^{(k-2)/2}\chi(-1)W(\lambda)(f, f)_{\Gamma_0(M)}$$

は 0 でない．また任意の $T \in \mathbf{h}_k(\Gamma_0(M), \chi)$ について

$$\begin{aligned}(f|T, g)_\infty &= (g, \widetilde{(f|T)}|_k\tau_M)_{\Gamma_0(M)} &&= (g, \tilde{f}|T|_k\tau_M)_{\Gamma_0(M)} \\ &= (g, (\tilde{f}|_k\tau_M)|\tau_M^{-1}T\tau_M)_{\Gamma_0(M)} &&= (g|T, \tilde{f}|_k\tau_M)_{\Gamma_0(M)} \\ &= (f, g|T)_\infty\end{aligned}$$

となる (途中計算の詳細は §5.4, p.145 を参照せよ)．よって

$$c(f, g) = \frac{(f, g)_\mathbb{C}}{(f, f)_\mathbb{C}} = \frac{(f, g)_\infty}{(f, f)_\infty}$$

が成り立つ．既に見たように $(\ ,\ )_\mathbb{C}$ は p-進的な設定に容易に拡張できるが，抽象的に定義されるため具体的に値を計算するには向かない．一方で $(\ ,\ )_\infty$ は Petersson 内積を用いて定義されるため，具体的な計算が可能である．

4.2. **Algebraicity of Rankin product L-functions.** ここでは §5.4 で定義された Rankin product L-関数の特殊値の代数性について振り返る．ただし tame level N は 1 に限らず一般とする．以下の設定のもとで議論を進める：

(P1) k, l が 2 以上の整数で $k > l$ を満たすとする．$\alpha, \beta \geq 1$ を整数，$\chi_0 : (\mathbb{Z}/Np^\alpha\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$, $\psi_0 : (\mathbb{Z}/Np^\beta\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ をそれぞれ Dirichlet 指標とする．二つの代数の準同型

$$\lambda_0 : \mathbf{h}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(Np^\alpha), \chi_0; \mathbb{Q}(\chi_0)) \to \overline{\mathbb{Q}};$$
$$\varphi_0 : \mathbf{h}_l(\Gamma_0(Np^\beta), \psi_0; \mathbb{Q}(\psi_0)) \to \overline{\mathbb{Q}}$$

に対応する保型形式をそれぞれ f, h とする．すなわち

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_0(T(n))q^n \in \mathcal{S}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(Np^\alpha), \chi_0; \mathbb{Q}(\lambda_0)),$$
$$h(z) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_0(T(n))q^n \in \mathcal{S}_l(\Gamma_0(Np^\beta), \psi_0; \mathbb{Q}(\varphi_0))$$

である．ただし $\mathbb{Q}(\lambda_0) = \mathbb{Q}(\{\lambda_0(T(n)) \mid n = 1, 2, \ldots\})$ とした (φ_0 についても同様).

(P2) χ_0 は Np^α を法として原始的，もしくは $\alpha = 1$ かつ法 Np の自明な指標であるとする．

(P3) $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ として，$\chi_0\psi_0^{-1}$ は Np^γ を法として原始的であるとする．

注意 4.6. (1) (P1) において $\mathbb{Q}(\lambda_0)$ は f の Hecke 体に他ならない．λ_0 が代数の準同型だから f は正規化された Hecke 固有形式で，特に $\mathbb{Q}(\lambda_0)$ は有限次代数体である．なお，$\mathbb{Q}(\lambda_0)$ が χ_0 の値を含むことが容易に確認できる．φ_0 についても全て同様.

(2) $N = 1$ ならば，(P2) は (P1) から自動的に従う．何故なら (P1) より f が ordinary だから，f のレベルを χ_0 の導手と p の小さくない方まで下げることができるからである.

定義 4.7 (§5.4, p.154)**.** 上記の f, h に伴う Rankin product L-関数 $D(s,f,h)$ を

$$D(s,f,h)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_0(T(n))^c\varphi_0(T(n))n^{-s}\quad(\mathrm{Re}(s)>(k+l)/2+1)$$

で定める．

素数 v に対し $\alpha_v,\alpha'_v,\beta_v,\beta'_v\in\overline{\mathbb{Q}}$ を

$$X^2-\lambda_0(T(v))^cX+\chi_0^{-1}(v)v^{k-1}=(X-\alpha_v)(X-\beta_v),$$
$$X^2-\varphi_0(T(v))X+\psi_0(v)v^{l-1}=(X-\alpha'_v)(X-\beta'_v)$$

で定める．$D(s,f,h)$ は $\mathrm{Re}(s)>(k+l)/2+1$ の範囲で Euler 積

$$D(s,f,h)=\prod_v\frac{1-\chi_0^{-1}\psi_0(v)v^{k+l-2-2s}}{(1-\alpha_v\alpha'_vv^{-s})(1-\alpha_v\beta'_vv^{-s})(1-\beta_v\alpha'_vv^{-s})(1-\beta_v\beta'_vv^{-s})}$$

を持つ．ただし右辺は全ての素数 v に関する積である．この式の分子に着目して

$$L(s,\lambda_0^c\otimes\varphi_0)=L(2s+2-k-l,\chi_0^{-1}\psi_0)D(s,f,h)$$

とおく．この関数の特殊値は以下の意味で代数的である：$g=hE_{k-l}(\chi_0\psi_0^{-1})$ とおくと g は $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(Np^\gamma),\chi_0;\mathbb{Q}(\chi_0,\varphi_0))$ に属する．$\alpha\geq\beta$ ならば §5.4, pp.153–156 の計算と同様の方法で,

$$c(f,g)=\frac{(Np^\alpha)^{k-l}\Gamma(k-l)\Gamma(k-1)L(k-1,\lambda_0^c\otimes\varphi_0)}{\tau(\chi_0^{-1}\psi_0)(-2\pi\sqrt{-1})^{k-l}(4\pi)^{k-1}(f,f)_{\Gamma_0(Np^\alpha)}}\tag{4.1}$$

となることが分かる[21]．ただし $\tau(\chi_0^{-1}\psi_0)$ は指標 $\chi_0^{-1}\psi_0$ の Gauss 和である．$c(f,g)$ は g を $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(Np^\gamma),\chi_0;\mathbb{Q}(\chi_0,\varphi_0))$ の正規化された Hecke 固有形式の線形結合で表したときの f の係数だから $\mathbb{Q}(\lambda_0,\varphi_0)$ の元．特に等式 (4.1) の右辺は代数的数である．従って f,h が p-進族の元を動くとき，$c(f,g)$ の p-進補間を考えることに意味がある．

注意 4.8. 条件 (P1)–(P3) のもとで，等式 (4.1) の値は 0 でない．この事実は $N=1$ のとき Lemma 5.4.2 (§5.4, p. 155) で，N が一般のときは [Wil] の Theorem 1.4.1 (p. 546) で示されている．

5. One variable interpolation

この節では $c(f,g)$ のうち f のみを動かしたときの p-進補間を考える．[LFE] §7.4 では χ を導手 p べきの Dirichlet 指標としているが，ここでは一般の tame level N を扱うことにして，χ は法 $N\mathbf{p}$ の偶指標とする．$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}(\varphi_0)$ を含む $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の整数環とする．$\Lambda=\mathcal{O}[[X]]$ とおき $\mathbf{L}$ を Λ の商体とする．定理 3.3 より[22] $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})^{\mathrm{new}}$ は半単純だから，$\mathbf{L}$ の有限次拡大体 $\mathbf{K}$ で $\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}\cong\prod_{i=1}^r\mathbf{K}$ となるものが取れる．このような $\mathbf{K}$ を一つ固定し，Λ の $\mathbf{K}$ の中での整閉包を $\mathbf{I}$ で表す．$F\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})^{\mathrm{new}}$ を正規化された Hecke 固有形式，$\lambda:\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I})^{\mathrm{new}}\to\mathbf{I}$ を F に対応する $\mathbf{I}$-代数の準同型とする．h と $E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l})$ の畳み込み積

$$h*E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l})(X)=hE(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l})(\psi_0(u)^{-1}u^{-l}(1+X)-1)$$

は $\mathbf{S}(N,\chi,\mathbf{L})$ の元になり，整数 $k>l$ と位数有限の指標 $\varepsilon:W\to\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に対して

$$\begin{aligned}&h*E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l})(\varepsilon(u)u^k-1)\\&=h\left\{E_{k-l}(\psi_0^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(z)-(\psi_0^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(p)p^{k-l-1}E_{k-l}(\psi_0^{-1}\varepsilon\chi\omega^{-k})(pz)\right\}\end{aligned}$$

を満たすのであった (第 2.2.4 節)．特に $(h*E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l}))|e\in\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{L})$.

---

[21] §5.4 では $N=1$ の場合しか扱っていないが，一般の N についても条件 (P1)–(P3) のもとで同様に計算できる．

[22] $N=1$ の場合は Theorem 7.3.4 (§7.3, p.218) より．

定義 5.1 (1 変数 p-進 L-関数)**.**

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0) = \frac{(F, (h * E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l}))|e)_{\mathbf{I}}}{(F,F)_{\mathbf{I}}} \in \mathbf{K}$$

と定める．

以下のようにして $L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ の部分集合の上の関数とみなすことができる．記号を濫用して $P \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ の核も P で表す．$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)$ の分母が P と互いに素ならば，$\mathbf{I}_P$ を $\mathbf{I}$ の P による局所化とすると $L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0) \in \mathbf{I}_P$．よって

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)(P) = L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0) \bmod P\mathbf{I}_P$$

は $\mathbf{I}/P$ の商体 $\mathbf{I}_P/P\mathbf{I}_P$ に値を持ち，$P : \mathbf{I} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ を介して $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元とみなせる．

記法 5.2. $\mathbf{I}$ の数論的点 $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ が $P|_\Lambda = \varphi_{k,\varepsilon}$ を満たすとき

$$k(P) = k,\ \varepsilon_P = \varepsilon,\ \chi_P = \varepsilon\chi\omega^{-k},\ \lambda_P = P \circ \lambda,\ F(P) = P(F)$$

と表す．χ_P の導手を p^{α_P} で表し，$\delta_P = \max\{\beta - \alpha_P, 0\}$ と書く．

この節の目標は次の定理を示すことである：

定理 5.3 (Theorem 7.4.1; §7.4, p.225)**.** $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ を $\mathbf{I}$ の数論的点で，$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)$ の分母が P と互いに素であるとする．また $(k(P), \chi_P, \lambda_P)$ と (l, ψ_0, φ_0) が条件 (P1)–(P3) を満たしているとする．このとき

$$\begin{aligned} L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)(P) = {} & \left\{ p^{k(P)-l} \lambda_P(T(p))^{-1} \varphi_0(T(p)) \right\}^{\delta_P} \\ & \times \frac{(Np^{\alpha_P})^{k(P)-l}\Gamma(k(P)-l)\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1, \lambda_P^c \otimes \varphi_0)}{\tau(\chi_P^{-1}\psi_0)(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}(4\pi)^{k(P)-1}(F(P),F(P))_{\Gamma_0(Np^{\alpha_P})}} \end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof. $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I})$ が数論的点で，$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)$ の分母と互いに素であるとする．定義より $\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I}_P) = \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I}) \otimes_{\mathbf{I}} \mathbf{I}_P = \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda) \otimes_\Lambda \mathbf{I}_P$ だから，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda)/P_{k(P),\varepsilon_P}\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\Lambda) & \longrightarrow & \mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I}_P)/P\mathbf{I}_P\mathbf{S}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{I}_P) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{k(P),\varepsilon(P)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bmod P\mathbf{I}_P} \\ \mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k(P)}(\Gamma_0(Np^{\alpha_P}), \chi_P; \mathcal{O}[\varepsilon_P]) & \longrightarrow & \mathcal{S}^{\mathrm{ord}}_{k(P)}(\Gamma_0(Np^{\alpha_P}), \chi_P; \mathbf{I}_P/P\mathbf{I}_P) \end{array}$$

は可換．さらに $((h * E(\chi\psi_0^{-1}\omega^{-l}))|e)(P) = (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|e$ だから

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi_0)(P) = \frac{(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|e)_{\mathbf{I}/P}}{(F(P),F(P))_{\mathbf{I}/P}}$$

となる．ここで，条件 (P1)–(P3) の下で $(\psi_0^{-1}\chi_P)(p) = 0$ となることに注意されたい．第 4.2 節より $\alpha_P \geq \beta$ なら右辺の値は定理 5.3 の右辺のそれに等しい．

以下 $\beta > \alpha_P$ を仮定して右辺の値を計算する．$\delta_P = \beta - \alpha_P$ である．$F(P)$ のレベルが Np^{α_P} である一方，(P3) より $\psi_0^{-1}\chi_P$ の導手が Np^β だから $hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P)$ のレベルは Np^β である．

そこでレベルを合わせるために，$F(P) = \lambda_P(T(p))^{-\delta_P}F(P)|T(p)^{\delta_P}$ に注意して

$$
\begin{aligned}
&\frac{(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|e)_{\mathbf{I}/P}}{(F(P), F(P))_{\mathbf{I}/P}} \\
&= \lambda_P(T(p))^{-\delta_P}\frac{(F(P)|T(p)^{\delta_P}, (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|e)_{\mathbf{I}/P}}{(F(P), F(P))_{\mathbf{I}/P}} \\
&= \lambda_P(T(p))^{-\delta_P}\frac{(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|e|T(p)^{\delta_P})_{\mathbf{I}/P}}{(F(P), F(P))_{\mathbf{I}/P}} \\
&= \lambda_P(T(p))^{-\delta_P}\frac{(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P}|e)_{\mathbf{I}/P}}{(F(P), F(P))_{\mathbf{I}/P}} \\
&= \lambda_P(T(p))^{-\delta_P}\frac{(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P})_{\mathbf{I}/P}}{(F(P), F(P))_{\mathbf{I}/P}}
\end{aligned}
$$

と変形する．ここで $(hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P}$ はレベル Np^{α_P} で定義されることに注意されたい．以後 $F(P)$ と $hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P)$ をそれぞれ，固定した体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{C}$ により複素関数とみなして計算を進める．

$$
\begin{aligned}
&(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P})_\infty \\
&= ((hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P}, \widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}})_{\Gamma_0(Np^{\alpha_P})} \\
&= (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P), \widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}}|T^*(p)^{\delta_P})_{\Gamma_0(Np^\beta)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで $T^*(p)^{\delta_P} = \left[\Gamma_0(Np^{\alpha_P})\left(\begin{smallmatrix} p^{\delta_P} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Gamma_0(Np^\beta)\right]$ である．集合として

$$
\Gamma_0(Np^{\alpha_P})\begin{pmatrix} p^{\delta_P} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Gamma_0(Np^\beta) = \Gamma_0(Np^{\alpha_P})\begin{pmatrix} p^{\delta_P} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}}|T^*(p)^{\delta_P})(z) &= \left(\widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}}|\left(\begin{smallmatrix} p^{\delta_P} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)(z) \\
&= p^{\delta_P(k(P)-1)}(\widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}})(p^{\delta_P}z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに Proposition 5.5.1 (§5.5, p.157) より，ある絶対値 1 の複素数 $W(\lambda_P)$ が存在して $\widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}} = (Np^{\alpha_P})^{(k(P)-2)/2}\chi_P(-1)W(\lambda_P)^cF(P)$ となる．よって

$$
\begin{aligned}
&(F(P), (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P})_\infty \\
&= p^{\delta_P(k(P)-1)}(hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P), (\widetilde{F(P)}|_{k(P)}\tau_{Np^{\alpha_P}})(p^{\delta_P}z))_{\Gamma_0(Np^\beta)} \\
&= p^{\delta_P(k(P)-1)}(Np^{\alpha_P})^{(k(P)-2)/2}\chi_P(-1)W(\lambda_P) \\
&\qquad \times (hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P), F(P)(p^{\delta_P}z))_{\Gamma_0(Np^\beta)}.
\end{aligned}
$$

この Petersson 内積を §5.4, pp.153–156 の議論に倣って計算する．簡単のため

$$
c_P = 2(Np^\beta)^{-(k(P)-l)}\tau(\psi_0\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}\Gamma(k(P)-l)^{-1}
$$

とおく．$F(P)$ の変数が $p^{\delta_P}z$ であることに注意すると，$z=x+\sqrt{-1}y$ として

$$\begin{aligned}
&(hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P), F(P)(p^{\delta_P}z))_{\Gamma_0(Np^\beta)}\\
&=2c_P^{-1}L(k(P)-l,\psi_0^{-1}\chi_P)\int_0^1\int_0^\infty h(z)(F(P)(p^{\delta_P}z))^c y^{k(P)-2}dxdy\\
&=2c_P^{-1}L(k(P)-l,\psi_0^{-1}\chi_P)\\
&\quad\times\int_0^\infty\sum_{m,n=1}^\infty a(m,F(P))^c a(n,h)\left(\int_0^1 e^{2\pi\sqrt{-1}(-mp^{\delta_P}+n)x}dx\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times e^{-2\pi(mp^{\delta_P}+n)y}y^{k(P)-2}dy\\
&=2c_P^{-1}L(k(P)-l,\psi_0^{-1}\chi_P)\int_0^\infty\sum_{m=1}^\infty a(m,F(P))^c a(mp^{\delta_P},h)e^{-4\pi mp^{\delta_P}y}y^{k(P)-2}dy\\
&=2c_P^{-1}L(k(P)-l,\psi_0^{-1}\chi_P)(4\pi p^{\delta_P})^{1-k(P)}\Gamma(k(P)-1)\\
&\qquad\qquad\times\sum_{m=1}^\infty a(m,F(P))^c a(mp^{\delta_P},h)m^{1-k(P)}.
\end{aligned}$$

ここで $a(mp^{\delta_P},h)=a(m,h|T(p)^{\delta_P})=\varphi_0(T(p))^{\delta_P}a(m,h)$ となることに注意すると，先の計算式は

$$\begin{aligned}
&(hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P), F(P)(p^{\delta_P}z))_{\Gamma_0(Np^\beta)}\\
&=2c_P^{-1}L(k(P)-l,\psi_0^{-1}\chi_P)(4\pi p^{\delta_P})^{1-k(P)}\Gamma(k(P)-1)\\
&\qquad\qquad\times\varphi_0(T(p))^{\delta_P}D(k(P)-1,F(P),h)\\
&=p^{-\delta_P(k(P)-1)}\\
&\quad\times\frac{(Np^\beta)^{k(P)-l}\Gamma(k(P)-l)\Gamma(k(P)-1)\varphi_0(T(p))^{\delta_P}L(k(P)-1,\lambda_P^c\otimes\varphi_0)}{\tau(\psi_0\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}(4\pi)^{k(P)-1}}
\end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}
&(F(P),(hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P})_\infty\\
&=(Np^{\alpha_P})^{(k(P)-2)/2}\chi_P(-1)W(\lambda_P)\varphi_0(T(p))^{\delta_P}\\
&\quad\times\frac{(Np^\beta)^{k(P)-l}\Gamma(k(P)-l)\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1,\lambda_P^c\otimes\varphi_0)}{\tau(\psi_0\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}(4\pi)^{k(P)-1}}.
\end{aligned}$$

さらに $(F(P),F(P))_\infty=(Np^{\alpha_P})^{(k(P)-2)/2}\chi_P(-1)W(\lambda_P)(F(P),F(P))_{\Gamma_0(Np^{\alpha_P})}$ だから

$$\begin{aligned}
L_p(\lambda^c\otimes\varphi_0)(P)&=\lambda_P(T(p))^{-\delta_P}\frac{(F(P),(hE_{k(P)-l}(\psi_0^{-1}\chi_P))|T(p)^{\delta_P})_\infty}{(F(P),F(P))_\infty}\\
&=(Np^{\alpha_P})^{(k(P)-2)/2}\chi_P(-1)W(\lambda_P)\left\{\lambda_P(T(p))^{-1}\varphi_0(T(p))\right\}^{\delta_P}\\
&\quad\times\frac{(Np^\beta)^{k(P)-l}\Gamma(k(P)-l)\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1,\lambda_P^c\otimes\varphi_0)}{\tau(\psi_0\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}(4\pi)^{k(P)-1}(F(P),F(P))_\infty}\\
&=(Np^\beta)^{k(P)-l}\left\{\lambda_P(T(p))^{-1}\varphi_0(T(p))\right\}^{\delta_P}\\
&\quad\times\frac{\Gamma(k(P)-l)\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1,\lambda_P^c\otimes\varphi_0)}{\tau(\psi_0\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-l}(4\pi)^{k(P)-1}(F(P),F(P))_{\Gamma_0(Np^{\alpha_P})}}.
\end{aligned}$$

これにて定理 5.3 の証明が完了した． □

6. Two variable interpolation

この節では $c(f,g), g = hE_{k-l}(\chi_0\psi_0^{-1})$ の f と h を同時に動かしたときの p-進補間を考える．$\mathbf{K}, \mathbf{I}, F, \lambda$ を前節と同じものとする．$\mathbf{L}$ の有限次拡大体 $\mathbf{M}$ を新たに一つ固定して，Λ の $\mathbf{M}$ の中での整閉包を $\mathbf{J}$ で表す．$\psi : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ を法 $N\mathbf{p}$ の偶指標とする．$G \in \mathbf{S}(N, \psi, \mathbf{J})$ を正規化された Hecke 固有形式，$\varphi : \mathbf{h}(N, \psi, \mathbf{J}) \to \mathbf{J}$ を G に対応する $\mathbf{J}$-代数の準同型とする．すなわち $\varphi(T(n)) = a(n, G)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ である．

記法 6.1. $\mathbf{J}$ の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が $Q|_\Lambda = \varphi_{k,\varepsilon}$ を満たすとき

$$k(Q) = k,\ \varepsilon_Q = \varepsilon,\ \psi_Q = \varepsilon\psi\omega^{-k},\ \varphi_Q = Q \circ \varphi,\ G(Q) = Q(G)$$

と表す．また，ψ_Q の導手を p^{β_Q} で表し，$\delta_{P,Q} = \max\{\beta_Q - \alpha_P, 0\}$ と書く．

定義 6.2. $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が G について **admissible** であるとは，$G(Q) \in (\mathbf{J}/Q)[[q]]$ がある $\mathcal{S}_{k(Q)}(\Gamma_0(Np^{\beta_Q}), \psi_Q; \overline{\mathbb{Q}})$ の元の q-展開になることをいう．

注意 6.3. Control Theorem (Theorem 7.3.3; §7.3, p.215) の帰結として，G が ordinary なら任意の数論的点が G について admissible である．しかし今は G が ordinary とは限らないので，任意の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ に対し $G(Q)$ が古典的なモジュラー形式の q-展開になっているとは限らない．なお，Q が G について admissible ならば，G が正規化された Hecke 固有形式であるから $G(Q)$ もまた然り．よって Proposition 7.2.1 (§7.2, p.201) より $G(Q)$ の Hecke 体を代数体とみなすことができる．

以下，$\mathbf{J}$-adic forms を考える時は $\mathbf{J}$ を $\mathcal{O}[[Y]]$-代数とみなす．完備テンソル積

$$\Lambda\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J} = \varprojlim_n((\mathcal{O}[X]/(\varpi, X)^n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{J})$$

を考える．ここで ϖ は $\mathcal{O}$ の素元の一つである．また，$Q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{J}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し

$$\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q : \Lambda\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J} \to \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} (\mathbf{J}/Q); A \otimes B \mapsto A \otimes Q(B)$$

を $\mathbf{J}$ 成分に関する特殊化とする．以下 $\chi \neq \psi$ を仮定する (定理 6.7 で $\chi = \psi$ の場合に触れる)．この仮定のもとで $E = E(\chi\psi^{-1}) \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi\psi^{-1}, \Lambda)$ に対し

$$(G * E)(X) = GE(\psi(u)^{-1}(1+Y)^{-1}(1+X) - 1) \in \mathbf{J}[[X]]$$

とおく．数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ に対し

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)((G * E)(X)) &= G(Q)E((\psi\varepsilon_Q)(u)^{-1}u^{-k(Q)}(1+X) - 1)\\ &= G(Q)E(\psi_Q(u)^{-1}u^{-k(Q)}(1+X) - 1)\\ &= (G(Q) * E)(X) \in (\Lambda \otimes_{\mathcal{O}} (\mathbf{J}/Q))[[q]]\end{aligned}$$

となる．特に $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が G について admissible なとき，$j > k(Q)$ なる任意の整数 j に対して

$$\begin{aligned}(G(Q) * E)(u^j - 1) &= G(Q)E(\chi\psi^{-1})(\psi_Q(u)^{-1}u^{j-k(Q)} - 1)\\ &= G(Q)E(\chi\psi^{-1})((\omega^{k(Q)}\psi^{-1}\varepsilon_Q^{-1})(u)u^{j-k(Q)} - 1)\\ &= G(Q)E(\chi\psi^{-1})(\varepsilon_Q^{-1}(u)u^{j-k(Q)} - 1)\\ &= G(Q)\Big\{E_{j-k(Q)}(\chi\psi_Q^{-1}\omega^{-j})(z)\\ &\qquad - (\chi\psi_Q^{-1}\omega^{-j})(p)p^{j-k(Q)-1}E_{j-k(Q)}(\chi\psi_Q^{-1}\omega^{-j})(pz)\Big\}\\ &\in \mathcal{S}_j(\Gamma_0(Np^{\gamma}), \chi\omega^{-j}; (\mathbf{J}/Q)) \quad (p^{\gamma} = \max\Big\{p^{\beta_Q}, \mathrm{cond}(\chi\psi_Q^{-1})\Big\})\end{aligned}$$

となるから $(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(G * E) = G(Q) * E \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} (\mathbf{J}/Q))$.

補題 6.4. $H = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,H)q^n \in (\Lambda\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J})[[q]]$ に対し，整数 $a \geq 1$ が存在して $k(Q) \geq a$ なる任意の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が $(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(H) \in \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} (\mathbf{J}/Q))$ を満たすとする．このとき $H \in \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ となる．

Proof. tame level N が 1 のときと一般のときで証明が全く同じなので，$N = 1$ の場合の証明を紹介する．以下，$\mathbf{M}(\chi, \Lambda) = \mathbf{M}(1, \chi, \Lambda)$ のように略記する．

まず $\mathbf{J} = \mathcal{O}[[Y]]$ のときに主張を示す．このとき

$$\Lambda\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J} = \varprojlim_n((\mathcal{O}[X]/(\varpi, X)^n) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[[Y]]) = \mathcal{O}[[X, Y]].$$

よって $H = H(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,H)(X,Y)q^n \in \mathcal{O}[[X,Y]][[q]]$ としてよい．仮定より $k(Q) \geq a$ なる任意の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ に対し

$$(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(H) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,H)(X, \varepsilon_Q(u)u^{k(Q)} - 1)q^n \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[\varepsilon_Q])$$

となる．そこで特に $Q = \varphi_{k,1} : \mathcal{O}[[Y]] \to \mathcal{O}$ として整数 $k \geq a$ を動かすと

$$H(X,Y) - H(X, u^a - 1) \in P_{a,1}(Y)\mathcal{O}[[X,Y]][[q]]$$

より $H_1(X,Y) = P_{a,1}(Y)^{-1}(H(X,Y) - H(X, u^a - 1)) \in \mathcal{O}[[X,Y]][[q]]$. 仮定より任意の整数 $k \geq a$ に対し $H(X, u^k - 1) \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ だから，任意の $k \geq a+1$ に対し $H_1(X, u^k - 1) \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$. 次に

$$H_1(X,Y) - H_1(X, u^{a+1} - 1) \in P_{a+1,1}(Y)\mathcal{O}[[X,Y]][[q]]$$

より $H_2(X,Y) = P_{a+1,1}(Y)^{-1}(H_1(X,Y) - H_1(X, u^{a+1} - 1)) \in \mathcal{O}[[X,Y]][[q]]$. 先の議論により任意の整数 $k \geq a+1$ に対し $H_1(X, u^k - 1) \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$ だから，任意の $k \geq a+2$ に対し $H_2(X, u^k - 1) \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$. この操作を繰り返すと H は

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(X, u^{a+n} - 1)\prod_{j=1}^{n} P_{a-1+j}(Y), \quad H_n(X, u^{a+n} - 1) \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)$$

という形で表せる．各 $n \geq 0$ について $\prod_{j=1}^{n} P_{a-1+j}(Y) \in (\varpi, Y)^n\mathcal{O}[Y]$ だから右辺の無限級数が $\mathfrak{m}_Y = (\varpi, Y)$-進位相に関して収束して $H \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$.

次に一般の $\mathbf{J}$ について主張を示す．$\{\Phi\}$ を $\mathbf{M}$ の $\mathbf{L}$-基底，$\{\Phi^*\}$ を $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}/\mathbf{L}}$ に関する $\{\Phi\}$ の双対基底とする．$H \in \mathbf{M}[[X]]$ かつ $\mathbf{M} = \oplus_\Phi \mathbf{L}\Phi$ だから H は Φ たちの $\mathbf{L}[[X]]$ 上の線形結合で表される．実際 $H_\Phi = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}[[X]]/\mathbf{L}[[X]]}(\Phi^* H) \in \mathbf{L}[[X]]$ とおくと双対基底の定義より $H = \sum_\Phi H_\Phi \Phi$ となる．G について admissible な数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ で Φ^* の分母に現れるものは有限個しかない．よって Φ^* たちの分母に現れない $\mathcal{O}[[Y]]$ の数論的点 $Q = \varphi_{k(Q),\varepsilon(Q)}$ を $k(Q) \geq a$ となるよ

うに選ぶと，仮定から $(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(H_\Phi)$ は $\mathbf{M}(\chi, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[\varepsilon_Q])$ に属する．$\mathbf{J} = \mathcal{O}[[Y]]$ のときの議論より $H_\Phi \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathcal{O}[[Y]]$. これが各 Φ について示せるから $H \in \mathbf{M}(\chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$. □

補題 6.4 とその直前の計算から $G * E$ は $\mathbf{M}(N, \chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ に属することがわかる．冪等射影子 $e : \mathbf{M}(N, \chi, \Lambda) \to \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)$ を $\mathbf{J}$-線形に $\mathbf{M}(N, \chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ 上に延長したものも e で表し $(G * E)|e \in \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \Lambda)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$ を考える．さらに $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})$ 上の代数的 Petersson 内積 $(\ ,\ )_{\mathbf{I}}$ を $\mathbf{J}$-線形に延長したものを

$$(\ ,\ )_{\mathbf{I}\hat{\otimes}\mathbf{J}} : (\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}) \times (\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, \mathbf{I})\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}) \to H^{-1}\mathbf{I}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$$

で表す．ただし $H^{-1} \in \mathbf{K}$ は $(\ ,\ )_{\mathbf{I}}$ の分母である．

定義 6.5 (2 変数 p-進 L-関数)**.**

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi) = (F, (G * E)|e)_{\mathbf{I}\hat{\otimes}\mathbf{J}} \in H^{-1}\mathbf{I}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\mathbf{J}$$

と定める．

以下では，次の方法で $L_p(\lambda^c \otimes \varphi)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I}, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{J}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ 上の関数とみなす．$(P, Q) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{I}, \overline{\mathbb{Q}}_p) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathbf{J}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対し

$$L_p(\lambda^c \otimes \varphi)(P, Q) = (\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(L_p(\lambda^c \otimes \varphi))(P)$$

と書く．特に G について admissible な任意の数論的点 $Q \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ に対し

$$(\mathrm{id}_\Lambda \otimes Q)(L_p(\lambda^c \otimes \varphi)) = L_p(\lambda^c \otimes \varphi_Q)$$

が成り立つ．ただし右辺は定義 5.1 の 1 変数 p-進 L-関数である．

定理 6.6 (Theorem 7.4.2; §7.4, p.227)**.** $(P, Q) \in \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{I}) \times \mathfrak{X}^{\mathrm{arith}}(\mathbf{J})$ が数論的点の組で，Q が G について admissible, P が $L_p(\lambda^c \otimes \varphi_Q)$ の分母と互いに素，かつ $(k(P), \chi_P, \lambda_P)$ と $(k(Q), \psi_Q, \varphi_Q)$ が条件 (P1)–(P3) を満たしているとする．このとき

$$\begin{aligned}
&L_p(\lambda^c \otimes \varphi)(P, Q) \\
&= \left\{p^{k(P)-k(Q)}\lambda_P(T(p))^{-1}\varphi_Q(T(p))\right\}^{\delta_{P,Q}} \\
&\times \frac{(Np^{\alpha_P})^{(k(P)-k(Q))}\Gamma(k(P)-k(Q))\Gamma(k(P)-1)L(k(P)-1, \lambda_P^c \otimes \varphi_Q)}{\tau(\psi_Q\chi_P^{-1})(-2\pi\sqrt{-1})^{k(P)-k(Q)}(4\pi)^{k(P)-1}(F(P), F(P))_{\Gamma_0(Np^{\alpha_P})}}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

最後に $L_p(\lambda^c \otimes \varphi)$ の “留数公式” を紹介する：

定理 6.7 (Theorem 7.4.3; §7.4, p.228)**.** 上と同じ記号のもとで，$\chi = \psi$ を仮定する．このとき

$$\left\{((1+X)(1+Y)^{-1} - 1)L_p(\lambda^c \otimes \varphi)\right\}|_{X=Y} = 2^{-1}(\log_p u)(p^{-1} - 1)(F, G|e)_{\mathbf{I}}.$$

Proof. $E = E(\chi\psi^{-1})$ であったことを思い出す．$\chi = \psi$ のとき

$$\begin{aligned}
(G * E)(X, Y) &= GE(\chi\chi^{-1})(\chi(u)^{-1}(1+Y)^{-1}(1+X) - 1) \\
&= GE(1)((1+X)(1+Y)^{-1} - 1)
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
&\left\{((1+X)(1+Y)^{-1}-1)((G*E)|e)(X,Y)\right\}|_{X=Y} \\
&=(G|e)\left\{((1+X)(1+Y)^{-1}-1)E(1)((1+X)(1+Y)^{-1}-1)\right\}|_{X=Y} \\
&=(G|e)\left\{XE(1)(X)\right\}|_{X=0} \\
&=2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)(G|e).
\end{aligned}$$

次に $(F,F)_{\mathbf{I}}=1$ となることを見る．$\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}\cong\prod_{i=1}^{r}\mathbf{K}$ となるように $\mathbf{K}$ を取ったことを思い出す．$D=\mathbf{h}^{\mathrm{ord}}(N,\chi,\mathbf{K})^{\mathrm{new}}$ とおき $\lambda_i:D\to\mathbf{K}$ を i 番目の射影とする．また，D の標準基底を $\{e_i\}_{i=1}^{r}$ とおく (すなわち $\lambda_i(e_j)=\delta_{i,j}$: Kronecker's Delta). $\lambda=\lambda_1$ として一般性を失わない．D^* を D の $\mathbf{K}$-双対として，代数的 Petersson 内積の定義に基づき

$$\mathrm{Tr}_{D/\mathbf{K}}(T_FT')=a(1,F|T'),\quad\forall T'\in D$$

を満たす $T_F\in D$ を取る，T_F は同型 $i:D\cong D^*$ による $F\in D^*$ の逆像である．すると F と λ の双対性から

$$\mathrm{Tr}_{D/\mathbf{K}}(T_Fe_i)=\lambda(e_i)=\delta_{1,i},\quad\forall i=1,2,\dots,r$$

となる．一方で $\mathrm{Tr}_{D/\mathbf{K}}(e_ie_j)=\delta_{i,j}$ より $\mathrm{Tr}_{D/\mathbf{K}}(T_Fe_i)$ は T_F を e_i たちの線形結合で表したときの e_i の係数である．これより $T_F=e_1$ が結論できる．ゆえに

$$(F,F)_{\mathbf{I}}=T_F(F)=e_1(F)=\lambda_1(e_1)=1.$$

以上より

$$\begin{aligned}
&\left\{((1+X)(1+Y)^{-1}-1)L_p(\lambda^c\otimes\varphi)\right\}|_{X=Y} \\
&=(F,\left\{((1+X)(1+Y)^{-1}-1)((G*E)|e)(X,Y)\right\}|_{X=Y})_{\mathbf{I}\hat{\otimes}\mathbf{J}} \\
&=2^{-1}(\log_p u)(p^{-1}-1)(F,G|e)_{\mathbf{I}}
\end{aligned}$$

となり，定理の主張が示された． □

Appendix A. $E_1(\psi_1,\psi_2;1)E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1};1)$ の定数項

ここでは定理 2.14 に現れた $E_1(\psi_1,\psi_2;1)E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1};1)$ が cusp form であることを示す．η_1 と η_2 をそれぞれ導手 M_1,M_2 の Dirichlet 指標とする．重さ $k\geq1$ と $\eta_1\eta_2$ の偶奇が等しい，すなわち $(\eta_1\eta_2)(-1)=(-1)^k$ を満たすとする．行列 $A=\left(\begin{smallmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し，$E_k(\eta_1,\eta_2;1)|_kA$ の Fourier 展開の定数項は，$A_{21}\notin M_1\mathbb{Z}$ のとき 0 になることが知られている．よって $A_{21}\notin Np^r\mathbb{Z}$ のとき $E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1};1)|_{k-1}A$ の定数項は 0 になるから，以下では $A_{21}\in Np^r\mathbb{Z}$ を仮定する．この仮定により特に $A_{11}\notin p\mathbb{Z}$ となることに注意されたい．§5.1, p.129 にあるように，$M=M_1M_2$, $\tau_M=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\M&0\end{smallmatrix}\right)$ とおくと

$$E_k(\eta_1,\eta_2;1)|_k\tau_M=\eta_1(-1)v_1^{k-2}v_2^{2k}\tau(\eta_1)\tau(\eta_2^{-1})E_k(\eta_2^{-1},\eta_1^{-1};1)$$

が成り立つ．ただし $\tau(\eta)$ は指標 η の Gauss 和である．よって $E_1(\psi_1,\psi_2;1)|_1A$ の定数項が 0 であることと $E_1(\psi_2^{-1},\psi_1^{-1};1)|_1\tau_{Np^r}A$ の定数項が 0 であることが同値.

$$\tau_{Np^r}A=\begin{pmatrix}-A_{21}/(Np^r)&-A_{22}\\A_{11}&Np^rA_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Np^r&0\\0&1\end{pmatrix}$$

で $A_{11}\notin Np^r\mathbb{Z}$ だから $E_1(\psi_2^{-1},\psi_1^{-1};1)|_1\tau_{Np^r}A$ の定数項は 0. 任意の $A\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し $(E_1(\psi_1,\psi_2;1)E_{k-1}(\chi\psi^{-1}\omega^{-k},\mathbf{1};1))|_kA$ の定数項が 0 になることが結論できた.

Appendix B. 集合 $A_k^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k})$ の元の個数

この節では，第 2.5.1 節で予告したように，モジュラー形式の空間と cusp forms の空間の階数の差として現れる (有限) 集合 $A_k^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k})$ の要素の個数が，整数 $k \geq 2$ と位数有限の指標 $\varepsilon : W \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ に依らないことを示す．[H86b] の Lemma 5.3 (p. 578) により，この集合の濃度は，商空間

$$e(\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathbb{C}_p)/\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}), \varepsilon\chi\omega^{-k}; \mathbb{C}_p))$$

の次元に一致する．以下，法 $N\mathbf{p}p^r$ の Dirichlet 指標 $\eta : (\mathbb{Z}/N\mathbf{p}p^r\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}^\times$ に対し，

- η の $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ への制限を η_N,
- η の主単数群 $W = 1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ への制限を η_{w},
- $\eta_{\mathrm{t}} = \eta\eta_N^{-1}\eta_{\mathrm{w}}^{-1}$ (特に η_{t} は法 $\mathbf{p}$ で定義され，Teichmüller 指標のべきである)

とおく．大域類体論の観点から言えば，η_N は N の外不分岐 (特に p で不分岐), η_{w} と η_{t} は p の外不分岐で，η_{w} の位数が p のべき，η_{t} の位数は p と互いに素である．

定義 2.6 と 2.12 より $A_k^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k})$ は

$$\eta_1\eta_2 = \varepsilon\chi\omega^{-k},\ \mathrm{cond}(\eta_1)\mathrm{cond}(\eta_2)t \mid N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)},\ p \nmid \mathrm{cond}(\eta_2)t \tag{B.1}$$

を満たす (η_1, η_2, t) の集合である．今，χ が法 $N\mathbf{p}$ の指標 (つまり $\chi_{\mathrm{t}} = \mathbf{1}$) であることに注意すると，先の指標の分解の記号のもとで，条件 (B.1) は

$$\begin{cases} \eta_{1,\mathrm{w}} = \varepsilon, \quad \eta_{1,\mathrm{t}}\eta_{1,N}\eta_2 = \chi\omega^{-k}, \\ \mathrm{cond}(\eta_{1,\mathrm{w}}) \mid p^{r(\varepsilon)}, \quad \mathrm{cond}(\eta_{1,\mathrm{t}}\eta_{1,N})\mathrm{cond}(\eta_2)t \mid N\mathbf{p}, \quad p \nmid \mathrm{cond}(\eta_2)t \end{cases} \tag{B.2}$$

と同値である．よって写像

$$\begin{aligned} A_k^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}) \cap A(N\mathbf{p}p^{r(\varepsilon)}, \varepsilon\chi\omega^{-k}) &\to A_2^{\mathrm{ord}}(N\mathbf{p}) \cap A(N\mathbf{p}, \chi\omega^{-2}); \\ (\eta_1, \eta_2, t) &\mapsto (\eta_{1,\mathrm{t}}\omega^{k-2}\eta_{1,N}, \eta_2, t) \end{aligned}$$

は全単射である (逆写像は $(\zeta_1, \zeta_2, t) \mapsto (\varepsilon\zeta_1\omega^{-k+2}, \zeta_2, t)$ で与えられる)．

Appendix C. 命題 3.7 の証明

この節では命題 3.7 を証明する．その主張を振り返っておく．

命題 C.1 (命題 3.7 の再掲)**.** $\mathbf{K}$ を $\mathbf{L}$ の有限次拡大体，A を $\mathbf{K}$ の中での Λ の整閉包とする．$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, A)$ は自由 A-加群で，階数が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(N, \chi, A)$ のそれに一致する．

tame level が一般の場合と 1 の場合で証明の手筋が同じなので，$N = 1$ のときの証明を紹介する．以下，$\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, A) = \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(1, \chi, A)$ などと略記する．

Proof. 定義から $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ の Λ-基底 $F_1, F_2, \ldots, F_r$ が $\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \mathbf{L})$ の $\mathbf{L}$-基底となる．ここで補題を一つ用意する：

補題 C.2. $r = \mathrm{rank}_\Lambda(\mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda))$ 個の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 1$ で

$$D(n_1, n_2, \ldots, n_r)(X) = \det(a(n_i, F_j)(X))_{1 \leq i,j \leq r} \in \Lambda$$

が 0 でないものが存在する．

注意 C.3. 定理 1.6 の証明において，整数 $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 0$ で同様の性質を満たすものが存在することを用いた．この補題の主張で肝要なのは，$n_1, n_2, \ldots, n_r$ の中に 0 が含まれないようにできるという点である．

Proof. (補題 $C.2$ の証明) 集合 S とその部分集合 S' を

$$S = \{(n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r \mid 0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_r, D(n_1, n_2, \ldots, n_r)(X) \neq 0\},$$
$$S' = \{(n_1, n_2, \ldots, n_r) \in S \mid n_1 \ge 1\}$$

でそれぞれ定義する．F_i たちの線形独立性から S は空集合でない．S' が空集合と仮定するとすべての $(n_1, n_2, \ldots, n_r) \in S$ に対して $n_1 = 0$. これはある可逆行列 $B \in GL_r(\mathbf{L})$ が存在して

$$a(0, G_1) \neq 0,\ a(1, G_1) = a(2, G_1) = \cdots = 0,$$

$$a(0, G_2) = \cdots = a(0, G_r) = 0$$

となることを意味する．特に $G_1 = a(0, G_1) \in \mathbf{L}$ は定数．0 でない Λ の元で適当に分母を払って $G_1 = a(0, G_1) \in \Lambda$ としてよい．整数 $k \ge 2$ に対し $\varphi_{k,1}(G_1)$ は $\mathcal{O}$ の元となり，同時に Control Theorem から重さ k の ordinary な保型形式となる．重さ $k \ge 2$ より $\varphi_{k,1}(G_1) = 0$. $\cap_{k \ge 2} P_k \Lambda = \{0\}$ だから $G_1 = 0$ となる．これは $a(0, G_1) \neq 0$ に矛盾．ゆえに S' は空集合でない． □

補題 C.2 の条件を満たす整数 $n_1, n_2, \ldots, n_r \ge 1$ を取り，$D(n_1, n_2, \ldots, n_r)(X)$ を $D(X)$ と略記する．$F \in \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ を $F = \sum_{i=1}^r x_i F_i$ $(x_i \in \mathbf{L})$ と表して，定理 1.6 の証明と同様に x_i について解くと

$$D(X)\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda) \subset \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$$

となることが分かる．よって $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda) \cong D(X)\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ は有限生成 Λ-加群．また，M を $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ に含まれる自由 Λ-加群で階数が最大になるように取ると，その階数が r になることも分かる．整数 $k \ge 2$ を $D_k = D(u^k - 1) \neq 0$ となるように取ると $f_i = F_i(u^k - 1)$ が $\mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ の $\mathcal{O}$-基底になる．従って上と同様の議論により

$$D_k m_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$$

となる．すなわち $m_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ は有限生成 $\mathcal{O}$-加群となる．さらに $\mathcal{O}$ が単項イデアル整域であることに注意すると $m_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O})$ は階数 r の自由 $\mathcal{O}$-加群となる．$D_k \neq 0$ より写像

$$\varphi_{k,1} : \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)/P_k\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda) \to m_k^{\mathrm{ord}}(\Gamma_0(\mathbf{p}), \chi\omega^{-k}; \mathcal{O}); F \mapsto F(u^k - 1)$$

が well-defined で，かつ単射．$G_1, G_2, \ldots, G_s \in \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ を，$\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)/P_k\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ の $\mathcal{O}$-基底が $g_i = G_i(u^k - 1)$ となるように取ると G_i たちは Λ 上線形独立．$M = \oplus_{i=1}^s \Lambda G_i$ とおくと $M/P_kM = \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)/P_k\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$ だから中山の補題より $M = \mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, \Lambda)$. 先に済ませた階数の考察を踏まえると $s = r$ が結論できる．これにて $\mathbf{K} = \mathbf{L}$ の場合に命題 3.7 が示せた．一般の $\mathbf{K}$ については，上の議論で $D_k \neq 0$ となるように固定した $k \ge 2$ に対し，$P_k\Lambda$ の上にある A の素イデアル P を一つ取る．すると k と P の選び方から $D(X) \notin P$ だから $\mathbf{m}^{\mathrm{ord}}(\chi, A) \otimes_A A_P = \mathbf{M}^{\mathrm{ord}}(\chi, A_P)$. ただし A_P は A の P における局所化である．以下，$(k, 1)$ での特殊化の代わりに P での特殊化を考えると，$\mathbf{K} = \mathbf{L}$ の場合と同様にして命題の主張が証明できる． □

Acknowledgement

第 24 回 (2016 年度) 整数論サマースクールにおいて，講演の機会を与えてくださいました山上敦士先生に，心より感謝申し上げます．保型形式の p 進 family について集中的に勉強する，大変貴重な機会となりました．また，サマースクールに向けた p 進 family 勉強会で，講演の予行演習に数多くの有意義なご助言をお寄せいただきました，サマースクール講演者をはじめとする勉強

会参加者の皆様に感謝いたします．勉強会での議論を通じて，多くの学びがありました．最後に，石川勲さんと植木潤さんには，サマースクール講演予稿の作成にあたって，細部に至るまで調整にご協力いただきました．特に記して感謝いたします．

References

[H86a] H. Hida, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 2, 231–273.

[H86b] H. Hida, Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. Math. 85 (1986), no. 3, 545–613.

[LFE] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series,* London Mathematical Society Student Texts 26, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Iw] K. Iwasawa, *Lectures on p-adic L-functions,* Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972.

[落合] T. Ochiai, 「肥田理論の紹介」, 第 17 回 (2009 年度) 整数論サマースクール「l 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集.

[小澤] T. Ozawa, 「H. Hida, "Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series" 第 7.3 節と第 7.4 節の概説」, 第 24 回 (2016 年度) 整数論サマースクール講演予稿, available at http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/ha/SS2016/index.html

[佐々木] S. Sasaki, 「Buzzard-Taylor の解説とその後の発展について」, 本報告集.

[Wa] Lawrence C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields,* Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 83, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.

[Wil] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, Invent. Math. 94 (1988), 529–573.

Mathematical Institute, Tohoku University
6-3, Aramaki Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8578 JAPAN
Email address: sb2m06@math.tohoku.ac.jp, ozwtm2@icloud.com