EIGENVARIETY MACHINE の構成について (BUZZARD “EIGENVARIETIES” 第 5 節の概要)

山上 敦士　(創価大学)

Contents

0. Introduction

本稿では, Buzzard の論文 “Eigenvarieties” [2] の第 5 節「Spectral varieties and eigenvarieties」で解説されている *eigenvariety machine* なるものの構成について概説する.

p を素数とする. Coleman-Mazur は, 1998 年の共著論文 “The eigencurve” [5] で, finite slope をもつ eigenforms の p 進 families を slope の大きさに関わらず一括して parametrize する rigid analytic space を構成し, それを *eigencurve* と名付けた. (その構成方法については, 第 17 回整数論サマースクールにおける筆者による概説講演の発表内容 [8] もご参照いただきたい.)

Buzzard により提示された eigenvariety machine とは, Coleman-Mazur により示された Hecke 環を用いた eigencurve の構成方法を, 保型形式の p 進 family に限らず, より一般的な状況で活用できるように公理化したものである. (とはいえ, 筆者はこれまで, 保型形式の p 進 family への応用以外に eigenvariety machine が用いられた研究を見たことがない.)

実際に, Buzzard は eigenvariety machine の活用例として, [2] の Part II で, Coleman-Mazur が $p > 2$ かつ tame level が $N = 1$ の場合で, eigencurve を構成していたのに対し, 任意の素数 p と任意の tame level N の場合で再構成し, [2] の Part III では, 総実代数体上で定義された四元数環の乗法群上の保型形式を用いて, Hilbert 保型形式の p 進 family を parametrize する eigenvariety を構成している.

さて, ここから状況の設定をして, 本稿の流れをおおまかに説明したい.

K を非自明な非アルキメデス的絶対値 $|\cdot|_K$ に関して完備な体とし, R を reduced affinoid K-algebra とする. ここで, reduced であるという条件から, [1, Theorem 6.2.4/1] により, sup norm $|\cdot|_{\sup}$ に関して R は Banach K-algebra となることに注意.

以下, とくに断らない限り, Banach R-module の norm を $|\cdot|$ とかくことにする.

Date: March 14, 2019.

M を Banach R-module とし, (Pr) と呼ばれる次の性質をもつとする:

(Pr) ある Banach R-module M' が存在し, norm

$$|m \oplus m'| := \max\{|m|,\ |m'|\} \quad (m \in M,\ m' \in M')$$

によって $M \oplus M'$ を Banach R-module とみなしたとき, $M \oplus M'$ は *potentially ONable* である, つまり, 上の norm と同値なある norm を適切にとることによって, $M \oplus M'$ を正規直交化可能にすることができる.

$\mathbb{T}$ を可換な R-algebra とし, M は $\mathbb{T}$-作用をもつ, つまり, ある R-algebra 準同型

$$\mathbb{T} \to \mathrm{End}_{\mathrm{cont}.R\text{-mod.}}(M) =: \mathrm{End}_R(M)$$

が存在するとする. $t \in \mathbb{T}$ の $\mathrm{End}_R(M)$ における像をそのまま t とかく. ここで. $\mathrm{End}_R(M)$ は norm

$$|\varphi| := \sup_{0 \neq m \in M} \frac{|\varphi(m)|}{|m|} \quad (\varphi \in \mathrm{End}_R(M))$$

により, Banach R-module となることに注意.

ある $\phi \in \mathbb{T}$ が存在して, $\phi : M \to M$ は *compact*, つまり, 像が M の有限生成な R-submodule に含まれるような endomorphisms からなる $\mathrm{End}_R(M)$ 内のある Cauchy 列の極限として表されるとする.

このとき, M が性質 (Pr) をもつことにより, $M \oplus M'$ 上の compact な endomorphism $\phi \oplus 0$ と $M \oplus M'$ のしかるべき norm に関する正規直交基底を用いて, ϕ の特性べき級数

$$F(T) := \det(1 - T\phi|_M) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n T^n \in R\{\{T\}\}$$

を定めることができる. ここで, $R\{\{T\}\}$ は, R-係数の形式的べき級数 $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ であって, 任意の正の実数 C に対し, $\lim_{n \to \infty} |a_n| C^n = 0$ となるもの全体からなる $R[\![T]\!]$ の部分環を表す.

R の極大 ideal 全体からなる K 上の affinoid variety $\mathrm{Max}(R)$ と K 上の rigid analytic な affine line $\mathbb{A}^1 := \mathbb{A}_K^{1,\mathrm{an}}$ (その構成については, [1, Example 9.3.4/1] を参照) の K 上の fiber product $\mathrm{Max}(R) \times_K \mathbb{A}^1$ 内で, 定義方程式 $F(T) = 0$ で定められる closed subspace を

$$Z_\phi \subset \mathrm{Max}(R) \times_K \mathbb{A}^1$$

と表し, ϕ に付随する *spectral variety* という. これは, M 上の compact な endomorphism ϕ の 0 以外の固有値を parametrize する rigid analytc な幾何的対象とみなすことができる.

Z_ϕ からの 2 つの射影をそれぞれ

$$f : Z_\phi \to \mathrm{Max}(R),$$
$$g : Z_\phi \to \mathbb{A}^1$$

とおく.

以上で設定された affinoid K-algebra R 上の data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に対し, 本稿の第 2 節で, $\mathbb{T}$ に属する M 上の作用素たちの固有値の systems を parametrize する rigid analytic space D_ϕ で, 次の図式を可換にするものを構成する:

$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ & \searrow \quad \circlearrowleft \quad \swarrow f & \\ & \mathrm{Max}(R) & \end{array}$$

この D_ϕ を data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する *eigenvariety* という.

第 2 節での本格的な構成に入る前に, 簡単な例として, 第 1 節で M が有限生成な projective R-module であり, ϕ が M 上可逆である場合に, D_ϕ の構成の様子をみることにする.

さらに, 第 3 節と第 4 節では, 第 5 節への準備として, base change $R \to R'$ と Banach R-modules の取り替え $M \to M'$ のそれぞれと eigenvariety の構成との整合性について考察する.

そして, 第 5 節において, rigid analytic space $\mathcal{W}$ (通常, 保型形式の p 進 family を扱うときには *weight space* と呼ばれるもの) の任意の admissible affinoid subdomain $X \subset \mathcal{W}$ に付随する data $(\mathcal{O}(X),\ M_X,\ \mathbb{T},\ \phi_X)$ から構成される eigenvariety D_{ϕ_X} たちを $\mathcal{W}$ 上で貼り合わせることで, data $(\{\mathcal{O}(X)\}_{X\subset\mathcal{W}},\ \{M_X\}_{X\subset\mathcal{W}},\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety D_ϕ が構成されることを *eigenvariety machine* として示す.

1. M が有限生成 projective R-module かつ ϕ が可逆である場合

Introduction の状況で, M が有限生成な projective R-module であり, ϕ が M 上可逆であると仮定する. M の R 上の rank を d とおく. この場合で, data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety D_ϕ を構成してみよう.

M は有限生成な projective R-module であるから, 性質 (Pr) をもち, ϕ の M 上での特性べき級数は d 次多項式

$$F(T) = \det(1 - T\phi) = 1 + c_1 T + \cdots + c_d T^d \in R[T]$$

として表される. このとき, ϕ が M 上で可逆であるという仮定から, $F(T)$ の最高次係数 c_d について,

$$c_d \in R^\times$$

となる.

$F(T)$ の最高次係数が単数であることに注意して, $R\{\{T\}\}/(F(T))$ の完全代表系として多項式からなるものをとることができるので ([2] の第 3 節 21 ページでの解説を参照のこと),

$$R\{\{T\}\}/(F(T)) = R[T]/(F(T))$$

であり, $R[T]/(F(T))$ は finite R-algebra であるから, [1, Proposition 6.1.1/6] により, affinoid K-algebra である. ϕ に付随する spectral variety $Z_\phi \in \mathrm{Max}(R) \times_K \mathbb{A}^1$ は定義方程式 $F(T) = 0$ で定められた clozed subspace であるので, 以上のことから, affinoid variety として,

$$Z_\phi = \mathrm{Max}(R[T]/(F(T)))$$

であることがわかる.

一方,

$$\mathbb{T}(Z_\phi) := \mathrm{Image}(\mathbb{T} \to \mathrm{End}_R(M))$$

とおくと, R は Noether 的であり, M は有限生成 projective R-module であることから, $\mathbb{T}(Z_\phi)$ も finite R-algebra となるので, [1, Proposition 6.1.1/6] により affinoid K-algebra である.

ここで,
$$F^*(T) := T^d F\left(\frac{1}{T}\right) = T^d + c_1 T^{d-1} + \cdots + c_{d-1}T + c_d$$
とおく. $\mathrm{End}_R(M)$ の R-submodule $R \cdot F^*(\phi)$ について, R の任意の極大 ideal $\mathfrak{m}$ に対し, $R/\mathfrak{m}$ 上での Cayley-Hamilton の定理により,
$$R \cdot F^*(\phi) \otimes R/\mathfrak{m} = \{0\}$$
である. よって, [7, Theorem 4.8] により,
$$F^*(\phi) = \phi^d + c_1\phi^{d-1} + \cdots + c_{d-1}\phi + c_d = 0$$
が得られる.

$c_d \in R^\times$ であるから, $\mathbb{T}(Z_\phi)$ において,
$$\phi(-c_d^{-1}c_{d-1} - \cdots - c_d^{-1}c_1\phi^{d-2} - c_d^{-1}\phi^{d-1}) = 1$$
となるので,
$$\phi^{-1} \in \mathbb{T}(Z_\phi)$$
であり,
$$F(\phi^{-1}) = (\phi^{-1})^d F^*(\phi) = 0$$
であるので, R-algebra 準同型
$$R[T] \to \mathbb{T}(Z_\phi); \quad T \mapsto \phi^{-1}$$
から, R-algebra としての構造射とともに, affinoid R-algebras の可換図式
$$\begin{array}{ccc} R[T]/(F(T)) & \longrightarrow & \mathbb{T}(Z_\phi) \\ \nwarrow & \circlearrowright & \nearrow \\ & R & \end{array}$$
が誘導される. よって,
$$D_\phi := \mathrm{Max}(\mathbb{T}(Z_\phi))$$
とおくことで, affinoid varieties の可換図式
$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ \searrow & \circlearrowright & \swarrow \\ & \mathrm{Max}(R) & \end{array}$$
が得られる.

以上により, data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety D_ϕ を構成することができた.

Example 1.1. D_ϕ が Z_ϕ 上あるいは $\mathrm{Max}(R)$ 上でいつでも flat になるとは限らないこと, また, Z_ϕ や D_ϕ は reduced であるとは限らないことを具体的に反例を構成することで示してみよう.

data として, 以下のものを考える:
$$R := K\langle X,\ Y\rangle,\ M := R^2,\ \mathbb{T} := R[\phi, t] \text{ with } \phi := \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ t := \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
ここで,
$$\phi t = t\phi = t$$
であるので, $R[\phi,\ t]$ は可換であることに注意.

M の R 上の標準基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を用いて ϕ の M 上での特性多項式を計算すると,

$$
\begin{aligned}
F(T) = \det(1 - T\phi|_M) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 1-T & -TX \\ 0 & 1-T \end{pmatrix} \right) = (1-T)^2
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$Z_\phi := \mathrm{Max}(R[T]/(F(T))) = \mathrm{Max}(R[T]/(1-T)^2)$$

は reduced ではない. また, $\mathbb{T}(Z_\phi)$ において, $t^2 = 0$ であるから, $D_\phi = \mathrm{Max}(\mathbb{T}(Z_\phi))$ も reduced ではない.

さらに, もし D_ϕ が $\mathrm{Max}(R)$ 上 flat であるとすると, R の任意の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し, 局所化 $\mathbb{T}(Z_\phi)_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ 上 free であるはずだが, とくに $\mathfrak{p} = (Y)$ ととれば, $\mathbb{T}(Z_\phi)_{(Y)}$ において, 非自明な関係式

$$Y \cdot \frac{1}{X}\left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

が成立するので矛盾が生じる. よって, D_ϕ は $\mathrm{Max}(R)$ 上 flat ではない.

また, D_ϕ が $Z_\phi = \mathrm{Max}(R[T]/(F(T)))$ 上 flat ではないことについても, $R[T]/(F(T))$ の素 ideal $(Y,\ 1-T)/(F(T))$ に $X (\mathrm{mod}\ (F(T)))$ が属さないことから, 上と全く同様の議論で示すことができる.

2. affinoid K-algebra 上での構成

M が性質 (Pr) をもつ一般の Banach R-module である場合は, $\mathrm{Max}(R)$ の affinoid subdomains 上 finite な対象を用いるための工夫として, [2, Theorem 4.6] で構成された Z_ϕ の admissible covering $\mathcal{C}$ を用いることになる.

この admissible covering $\mathcal{C}$ は, Coleman-Mazur の eigencurve で用いられた spectral curve の admissible covering とほぼ同様の議論で構成されるものであるが, Buzzard の仕事として特筆すべき点は, Coleman-Mazur の構成においてとくに重要となる [4, Proposition A5.8] の主張を, spectral variety に関する主張へと高次元に一般化するにあたり, admissible covering $\mathcal{C}$ のメンバーたちが $\mathrm{Max}(R)$ の affinod subdomain 上で finite であることを保証するために, Raynaud の formal model の理論を活用した Conrad の定理 [6, Theorem A.1.2] を用いている点である.

さて, data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ を Introduction で設定されたものとし, $\mathcal{C}$ を spectral variety Z_ϕ の [2, Theorem 4.6] で構成された admissible covering とする. ここで, $\mathcal{C}$ は次の 3 条件を満たす Z_ϕ の affinoid subdomain Y 全体のなす集合である:

(i) 射影 $f : Z_\phi \to \mathrm{Max}(R)$ のもと, $X := f(Y)$ は $\mathrm{Max}(R)$ の affinoid subdomain である.

(ii) Y は X 上 finite である.

(iii) $Z_X := f^{-1}(X)$ とおく. ある $e \in \mathcal{O}(Z_X)$ で, $e^2 = e$ かつ $e|_Y = 1,\ e|_{Z_X \setminus Y} = 0$ を満たすものが存在する. つまり, Y は Z_X で open かつ closed である.

$A := \mathcal{O}(X)$ を X に付随する affinoid algebra とすると, R は reduced であると仮定されているから, [1, Corollary 7.3.2/10] により, A も reduced であることに注意.

$M_A := M\hat{\otimes}_R A$ とおくと, [2, Lemma 2.13] により M_A も性質 (Pr) をもつことがわかっている.

各 $t \in \mathbb{T}$ に対し, R-module M 上の endomorphism $t : M \to M$ から誘導される A-module M_A 上の endomorphism を

$$t_A : M_A \to M_A$$

とかくことにする. このとき, とくに

$$\phi_A : M_A \to M_A$$

は, [2, Lemma 2.13] により compact であり, その特性べき級数は

$$\begin{aligned} F_A(T) &:= \det(1 - T\phi_A|_{M_A}) \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} (\text{the image of } c_n \text{ in } A) T^n \in A\{\{T\}\} \end{aligned}$$

となることがわかっている.

[2, Corollary 4.2] により, $\mathcal{O}(Y)$ は finite flat A-module であることが示されており, とくに, $\mathcal{O}(Y)$ は A 上 locally free である. Y は Z_ϕ の affinoid subdomain であるから, ある $r \in \{|a|_K \mid a \in K^\times\} (\subset \mathbb{R}_{>0})$ が存在して, $\mathbb{A}^1$ 内の 0 を中心とする半径 r の closed affinoid disk $B[0,\ r]$ との fiber 積 $X \times_K B[0,\ r]$ における定義方程式 $F(T) = 0$ で定められた closed subspace Z_r に Y は含まれる. このとき,

$$\begin{aligned} A\langle T\rangle_r &:= \mathcal{O}(X \times_K B[0,\ r]) \\ &= \left\{ \sum_{n\geq 1} a_n T^n \in A[\![T]\!] \;\middle|\; |a_n| r^n \to 0 \ (n \to 0) \right\} \end{aligned}$$

の元 T の $\mathcal{O}(Y)$ での像を改めて T とかけば, T 倍写像 $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(Y)$ の A 上の特性多項式 $Q'(T) \in A[T]$ の次数 d は $\mathcal{O}(Y)$ の A 上の rank と一致するので,

$$Q'(T) := a_0 + a_1 T + \cdots + T^d \in A[T]$$

とおくことができる.

A-algebra 全射準同型

$$A\langle T\rangle_r \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y); \quad T \mapsto T$$

から A-algebra 全射準同型

$$A\langle T\rangle_r/(Q'(T)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y); \quad T \pmod{(Q'(T))} \mapsto T$$

が誘導される. 一方, $A\langle T\rangle_r$ の Gauss norm による Banach 位相と, $A\langle T\rangle_r/(Q'(T))$ の finite A-module としての Banach 位相に関して, [1, Proposition 3.7.4/1] により, 自然な全射

$$A\langle T\rangle_r \twoheadrightarrow A\langle T\rangle_r/(Q'(T))$$

は連続で, $A\langle T\rangle_r/(Q'(T))$ の finite A-module としての Banach norm と $A\langle T\rangle_r$ からの residue norm は同値となる. したがって, $A[T]$ は $A\langle T\rangle_r$ において稠密であることから, $A[T]/(Q'(T))$ は $A\langle T\rangle_r/(Q'(T))$ で稠密である. $A[T]/(Q'(T))$ は finite A-module として, $A\langle T\rangle_r/(Q'(T))$ からの相対位相に関して完備であるので,

$$A[T]/(Q'(T)) = A\langle T\rangle_r/(Q'(T))$$

となる. よって, A-algebra 全射準同型

$$A[T]/(Q'(T)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(Y)$$

が得られる. 両辺とも同じ rank d をもつ locally free A-module であるので, この全射は同型

$$A[T]/(Q'(T)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y); \quad T \pmod{(Q'(T))} \mapsto T$$

である. 第 1 節でみたように,

$$A\{\{T\}\}/(Q'(T)) = A[T]/(Q'(T))$$

であるので, 同型

$$A\{\{T\}\}/(Q'(T)) = A[T]/(Q'(T)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y); \quad T \pmod{(Q'(T))} \mapsto T$$

が得られる.

$F_A(T) \in A\{\{T\}\}$ について, Y 上 $F_A(T) = 0$ であるので,

$$F_A(T) \pmod{(Q'(T))} = 0,$$

つまり $F_A(T) \in (Q'(T))$ となり, ある $H(T) \in A\{\{T\}\}$ が存在して,

$$F_A(T) = Q'(T)H(T)$$

と分解される. $F_A(T)$ の定数項は 1 であるので, $Q'(T)$ の定数項 a_0 は $A^\times$ の単数であり,

$$\begin{aligned} Q(T) &:= a_0^{-1}Q'(T) = 1 + a_0^{-1}T + \cdots + a_0^{-1}T^d \in A[T], \\ S(T) &:= a_0 H(T) \in A\{\{T\}\} \end{aligned}$$

とおけば, $F_A(T) = Q(T)S(T),\ \deg Q(T) = d,\ Q(0) = 1$, かつ, Q の最高次係数 a_0^{-1} は $A^\times$ に属する.

ここで, Y は connected であると仮定すると, admissible covering $\mathcal{C}$ の条件 (iii) と $\mathcal{O}(Y)$ が A 上 locally free of rank d であることから, [1, Proposition 7.3.3/7] と [1, Proposition 9.1.4/8] により, $Q(T)$ と $S(T)$ は $A\{\{T\}\}$ において互いに素であることがわかり, [2, Theorem 3.3] により, ある ϕ_A-不変な closed submodules による M_A の直和分解

$$M_A = N_{\phi_A} \oplus F_{\phi_A}$$

で次の 4 条件を満たすものが得られる:

(i) N_{ϕ_A} は rank d の projective A-module である.

(ii) $Q(T) = \det(1 - T\phi_A|_{N_{\phi_A}})$ であり, N_{ϕ_A} 上で $Q^*(\phi_A) = 0$ である.

(iii) F_{ϕ_A} 上で $Q^*(\phi_A)$ は可逆である.

(iv) 2 つの射影 $\mathrm{pr}_{N_{\phi_A}} : M_A \to N_{\phi_A}$ と $\mathrm{pr}_{F_{\phi_A}} : M_A \to F_{\phi_A}$ は $\mathrm{End}_R(M_A)$ において $A[\phi_A]$ の closure に属する.

条件 (iv) より, $t \in \mathbb{T}$ に対し, $\mathrm{pr}_{N_{\phi_A}}$ と $t_A : M_A \to M_A$ は可換であるので, N_{ϕ_A} は t_A-不変であり,

$$\mathbb{T}(Y) := \mathrm{Image}(\mathbb{T} \to \mathrm{End}_R(N_{\phi_A}))$$

を定義することができる, $\mathbb{T}(Y)$ は finite A-algebra であるので, [1, Proposition 6.1.1/6] により, affiniod K-algebra であることに注意して,

$$D(Y) := \mathrm{Max}(\mathbb{T}(Y))$$

とおく. $Q^*(\phi_A) = 0$ であることから, 不定元 S を用いて, A-algebra 準同型

$$A[S]/(Q^*(S)) \to \mathbb{T}(Y); \quad S \mapsto \phi_A$$

が得られて, $\mathbb{T}(Y)$ を finite $A[S]/(Q^*(S))$-algebra とみなすことができる.

一方, $\mathcal{O}(Y)$ において, $Q'(T)=0$ であったことから,

$$T(T^{d-1}+\cdots+a_1)a_0^{-1}=1$$

となり, $T\in\mathcal{O}(Y)^\times$ である. 全く同様に,

$$T\in(A[T]/(Q(T)))^\times,\quad S\in(A[S]/(Q^*(S)))^\times$$

であることがわかる.

$$\mathcal{O}(Y)\xrightarrow{\sim}A[T]/(Q(T));\quad T\mapsto T$$

かつ,

$$A[T]/(Q(T))\xrightarrow{\sim}A[S]/(Q^*(S));\quad T\mapsto S^{-1}$$

であるので, A-algebra 準同型

$$\mathcal{O}(Y)\xrightarrow{\sim}A[S]/(Q^*(S))\to\mathbb{T}(Y);\quad T\mapsto S^{-1}\mapsto\phi_A^{-1}$$

により, $\mathbb{T}(Y)$ を finite $\mathcal{O}(Y)$-algebra とみなすことができる.

以上により, Y 上 finite な affinoid variety

$$h_Y:D(Y)\to Y$$

が得られた.

$Y\in\mathcal{C}$ が connected とは限らない一般の場合は, [1, Proposition 9.1.4/8] とその後に続く解説により, Y を connected な有限個の affinoid subdomains による disjoint union $\bigsqcup_i Y_i$ に分解することができる. このとき, connected components による分解の一意性と [1, Proposition 7.2.1/5] により, $X=f(Y)$ も connected な有限個の affinoid subdomains による disjoint union $\bigsqcup_j f(Y_{i_j})$ に分解される. 各 i に対し適切な番号 i_j を対応させて, [1, Corollary 9.4.4/2] により, $f:Y_i\to f(Y_{i_j})$ は finite であり, $Y\in\mathcal{C}$ であるための条件 (iii) にある関数 $e\in\mathcal{O}(Z_X)$ を制限した $e|_{Z_{f(Y_{i_j})}}$ も $\mathcal{C}$ の条件 (iii) を満たすので, $Y_i\in\mathcal{C}$ である.

Y_i 上 finite な $D(Y_i)$ たちも互いに共通部分をもたないことに注意して, Y 上 finite な affinoid variety $D(Y)$ を

$$h_Y:=\sqcup_i h_{Y_i}:D(Y):=\bigsqcup_i D(Y_i)\to Y=\bigsqcup_i Y_i$$

として定義する.

以下, data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety D_ϕ を, 上で構成した affinoid varieties の族 $\{h_Y:D(Y)\to Y\}_{Y\in\mathcal{C}}$ を spectral variety Z_ϕ の admissible covering $\mathcal{C}$ に沿って貼り合わせることで, Z_ϕ 上 finite な rigid analytic space $D_\phi\to Z_\phi$ として構成したい.

そのために, 次の 2 つの補題を必要とする:

Lemma 2.1 ([2, Lemma 5.1])**.** *任意の $Y\in\mathcal{C}$ に対し, Y に付随する $\mathrm{Max}(R)$ の affinoid subdomain を $X:=f(Y)$ とおく. X の任意の affinoid subdomain X' をとり, $Y':=f^{-1}(X')\subset Y$ とおく. このとき, Y' は Y の affinoid subdomain であり, かつ, $Y'\in\mathcal{C}$ である. さらに, $D(Y')$ は $h_Y:D(Y)\to Y$ による Y' の逆像 $h_Y^{-1}(Y')$ と canonical に同型となる.*

Proof. X の affinoid subdomain X' の逆像 Y' は [1, Proposition 7.2.2/4] により, Y の affinoid subdomain である. また, [1, Corollary 9.4.4/2] により, finite な全射 $f : Y \to X$ を制限した射 $f : Y' \to X'$ も finite な全射になることがわかる. さらに, Y に対する admissible covering $\mathcal{C}$ の条件 (iii) にある関数 $e \in \mathcal{O}(Z_X)$ をとり, $e' := e|_{Z_{X'}} \in \mathcal{O}(Z_{X'})$ とおけば,

$$e'|_{Y'} = 1, \quad e'|_{Z_{X'} \setminus Y'} = 0$$

を満たすので, $Y' \in \mathcal{C}$ であることが示された.

次に, Y と Y' がともに connected であると仮定すると, Y' は Y の affinoid subdomain であることから,

$$\mathcal{O}(Y') = \mathcal{O}(Y)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}(X)}\mathcal{O}(X'), \quad \text{i.e.,} \quad Y' = Y \times_X X'$$

であり, $M_{\mathcal{O}(X')}$ の直和因子として得られる projective $\mathcal{O}(X')$-module N' について,

$$N' = N \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X')$$

であることがわかる. このことから,

$$\mathbb{T}(Y') = \mathbb{T}(Y) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(X'), \quad \text{i.e.,} \quad D(Y') = D(Y) \times_X X'$$

となり, $h_Y : D(Y) \to Y$ に対して, canonical な同型

$$h_Y^{-1}(Y') = D(Y) \times_Y Y' = D(Y) \times_Y (Y \times_X X') \cong D(Y) \times_X X' = D(Y')$$

が得られる.

connected とは限らない一般の Y に対しては, Lemma 2.1 の直前でみたように, Y を有限個の connected な $\mathcal{C}$ の元による disjoint union として分解し, この分解に沿って, Y の f による像 X も有限個の connected な affinoid subdomains による disjoint union として分解され, さらに, X の affinoid subdomain X' とその Y における逆像 Y' も, 有限個の connected な affinoid subdomain による disjoint union として分解されることを用いて, Y と Y' が connected な場合に得られた同型を貼り合わせることで, canonical な同型

$$h_Y^{-1}(Y') \cong D(Y')$$

を得ることができる. □

Lemma 2.2 ([2, Lemma 5.2]). *任意の $Y_1,\ Y_2 \in \mathcal{C}$ に対し, それらの共通部分 $Y := Y_1 \cap Y_2$ は空集合でないとする. このとき, 任意の $i = 1, 2$ に対し, Y は Y_i の affinoid subdomain であり, かつ, $Y \in \mathcal{C}$ である. さらに, $D(Y)$ は $h_{Y_i} : D(Y_i) \to Y_i$ による Y の逆像 $h_{Y_i}^{-1}(Y)$ と canonical に同型となる.*

Proof. 各 $i = 1,\ 2$ に対し, $X_i := f(Y_i) \subset \mathrm{Max}(R)$ とおけば, $Y_i \in \mathcal{C}$ であることから, X_i は $\mathrm{Max}(R)$ の affinoid subdomain であり, [1, Corollary 7.2.2/5] により, $X_1 \cap X_2$ も $\mathrm{Max}(R)$ の affinoid subdomain であり, 各 X_i の affinoid subdomain でもある.

$X_1 \cap X_2$ の有限個の connected な affinoid subdomains X による disjoint union $X_1 \cap X_2 = \bigsqcup X$ に沿って, $Y = \bigsqcup (Y \cap Z_X)$ と分解されることから, $X_1 \cap X_2$ の任意の connected な affinoid subdomains X に対し, 補題の主張を Y の代わりに $Y \cap Z_X$ に対して証明できれば, それらの主張を貼り合わせることで, Y に対する主張を得ることができる.

X は $X_1 \cap X_2$ の affinoid subdomain であり, 各 $i = 1,\ 2$ に対し, $X_1 \cap X_2$ は X_i の affinoid subdomain であるので, X は X_i の affinoid subdomain である. $f : Y_i \to X_i$ による X の逆像を $Y_i' \subset Y_i$ とおくと, Lemma 2.1 により, $Y_i' \in \mathcal{C}$, かつ, $h_{Y_i} : D(Y_i) \to Y_i$ のもと $h_{Y_i}^{-1}(Y_i') \cong D(Y_i')$ である.

$Y \cap Z_X = Y_1' \cap Y_2'$ であり, 各 $Y_i' \in \mathcal{C}$ は Z_ϕ の affinoid subdomain であるから, $Y \cap Z_X$ も Z_ϕ の affinoid subdomain である. また, $Y \cap Z_X = Y_1' \cap Y_2' \to Y_1'$ と $Y_1' \to X$ はともに finite であるので, $f : Y \cap Z_X \to X$ は finite である.

一方, 各 $Y_i' \in \mathcal{C}$ に対応する関数 $e_i \in \mathcal{O}(Z_X)$ をとり, $e = e_1 e_2$ とおくと, $Y \cap Z_X$ は Z_X において定義方程式 $e = 1$ で定義され, $\mathcal{C}$ の条件 (iii) が満たされる.

さらに, $\mathcal{C}$ の有限個の connected な元による disjoint union としての分解 $Y_i = \bigsqcup_{j_i} Y_i'^{(j_i)}$ に対応して得られる関数の和 $e_i = \sum_{j_i} e_i^{(j_i)}$ について,

$$e = e_1 e_2 = \sum_{j_1, j_2} e_1^{(j_1)} e_2^{(j_2)}$$

であり, 定義方程式 $e = 1$ で定義される $Y \cap Z_X$ は, 定義方程式 $e_1^{(j_1)} = e_2^{(j_2)} = 1$ で定義される Y_1' と Y_2' の connected components Y' たちの disjoint union $Y \cap Z_X = \bigsqcup Y'$ として表される. よって, X 自身 connected であることから, $f : Y \cap Z_X \to X$ は全射となり, $Y \cap Z_X \in \mathcal{C}$ であることが示された.

また, $\mathcal{C}$ の元たち disjoint union $Y \cap Z_X = \bigsqcup Y'$ に沿って, 各 $i = 1,\ 2$ に対し, $D(Y_i')$ の中で部分的に $D(Y')$ たちを貼り合わせることで,

$$D(Y \cap Z_X) = \bigsqcup D(Y') \to Y \cap Z_X = \bigsqcup Y'$$

が得られて, 同型 $h_{Y_i}^{-1}(Y_i') \cong D(Y_i')$ を $Y \cap Z_X$ の逆像に制限することで,

$$h_{Y_i}^{-1}(Y \cap Z_X) \cong D(Y \cap Z_X)$$

が得られる. □

これらの補題を用いて, affinoid varieties の族 $\{h_Y : D(Y) \to Y\}_{Y \in \mathcal{C}}$ が [1, Proposition 9.3.2/1] と [1, Propositon 9.3.3/1] で示されている rigid analytic space として貼り合うための次の条件を満たすことがわかる:

(i) 任意の $Y \in \mathcal{C}$ に対し, $D(Y)$ は affinoid variety である.

(ii) 任意の $Y,\ Y' \in \mathcal{C}$ に対し,

$$D_{Y,Y'} := h_Y^{-1}(Y \cap Y') \subset D(Y)$$

とおき, Lemma 2.2 により誘導される同型を

$$\varphi_{Y,Y'} : D_{Y,Y'} \xrightarrow{\sim} D(Y \cap Y') = D(Y' \cap Y) \xrightarrow{\sim} D_{Y',Y}$$

とおく. さらに, 任意の $Y,\ Y',\ Y'' \in \mathcal{C}$ に対し,

$$\varphi_{Y,Y',Y''} := \varphi_{Y,Y'}|_{D_{Y,Y'} \cap D_{Y,Y''}} : D_{Y,Y'} \cap D_{Y,Y''} \to D_{Y',Y}$$

とおく. このとき,

(a) 任意の $Y,\ Y' \in \mathcal{C}$ に対し, $\varphi_{Y,Y} = \mathrm{id}_{D(Y)}$, かつ, $\varphi_{Y,Y'} \circ \varphi_{Y',Y} = \mathrm{id}_{D_{Y,Y'}}$ である.

(b) 任意の $Y,\ Y',\ Y'' \in \mathcal{C}$ に対し, $\varphi_{Y,Y',Y''} = \varphi_{Y'',Y',Y} \circ \varphi_{Y,Y'',Y'}$ である.

(iii) 任意の $Y,\ Y' \in \mathcal{C}$ に対し, $h_Y = h_{Y'} \circ \varphi_{Y,Y'}$ である.

以上の条件が保証されたことから, [1, Proposition 9.3.2/1] と [1, Propositon 9.3.3/1] により, affinoid varieties の族 $\{h_Y : D(Y) \to Y\}_{Y \in \mathcal{C}}$ を spectral variety Z_ϕ の admissible covering $\mathcal{C}$ に沿って貼り合わせることで, Z_ϕ 上 finite な $\mathrm{Max}(R)$ 上の rigid analytic space として, data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety

$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & \mathrm{Max}(R) & \end{array}$$

を構成することができた. このとき, 任意の $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}$ に対し, $D(Y_1)$ と $D(Y_2)$ の D_ϕ の affinoid subdomain としての共通部分は, $D(Y_1 \cap Y_2)$ と同一視されている.

3. affinoid K-algebras の base change との整合性

data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$ に reduced な affinoid K-algebra R' への準同型 $R \to R'$ を用いて base change を施した data $(R',\ M',\ \mathbb{T}',\ \phi')$ を次のようにおく:

$$M' := M\hat{\otimes}_R R', \quad \mathbb{T}' := \mathbb{T}\hat{\otimes}_R R', \quad \phi' := \phi \otimes 1 : M' \to M'.$$

このとき, 第 2 節で示された構成により, それぞれの data に付随する 2 つの eigenvarieties

$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & \mathrm{Max}(R) & \end{array}$$

と

$$\begin{array}{ccc} D_{\phi'} & \longrightarrow & Z_{\phi'} \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & \mathrm{Max}(R') & \end{array}$$

が得られる. affinoid K-algebra 準同型 $R \to R'$ から, affinoid varieties の間の射 $\mathrm{Max}(R') \to \mathrm{Max}(R)$ が得られることに注意して, 次の 2 つの補題が成立する:

Lemma 3.1 ([2, Lemma 5.4])**.** *ϕ' に付随する $\mathrm{Max}(R')$ 上の spectral variety $Z_{\phi'}$ は, ϕ に付随する $\mathrm{Max}(R)$ 上の spectral variety Z_ϕ の $\mathrm{Max}(R')$ 上への pull back $\mathrm{Max}(R') \times_{\mathrm{Max}(R)} Z_\phi$ と canonical に同型である.*

Proof. 考えている affinoid K-algebra 準同型を $h : R \to R'$ とおくと, [2, Lemma 2.13] により, $R'\{\{T\}\}$ において等式

$$\begin{aligned} \det(1 - T\phi'|_{M'}) &= \det(1 - T(\phi \otimes 1)|_{M\hat{\otimes}_R R'}) \\ &= h(\det(1 - T\phi|_M)) \end{aligned}$$

が成立する. ここで, $h(\det(1 - T\phi|_M)) \in R'\{\{T\}\}$ は, $\det(1 - T\phi|_M) \in R\{\{T\}\}$ の係数ごとに h を施して得られるべき級数を表している. このことから, $Z_{\phi'} = Z_{\phi\otimes 1}$ が $\mathrm{Max}(R') \times_{\mathrm{Max}(R)} Z_\phi$ と canonical に同型であることが得られる. □

Lemma 3.2 ([2, Lemma 5.5])**.** *$R \to R'$ は flat であると仮定する. このとき, $D_{\phi'} \to Z_{\phi'}$ は, $D_\phi \to Z_\phi$ の Lemma 3.1 で得られた射 $Z_{\phi'} \to Z_\phi$ による pull back $D_\phi \times_{Z_\phi} Z_{\phi'}$ と canonical に同型である.*

Proof. 2 つの eigenvarieties D_ϕ, $D_{\phi'}$ を構成するために用いられた Z_ϕ, $Z_{\phi'}$ の admissible covering をそれぞれ $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ とする. $R \to R'$ が flat であるという仮定のもとで, Lemma 2.1 と同様の議論により, 任意の $Y \in \mathcal{C}$ に対し, Lemma 3.1 により得られた射 $Z_{\phi'} \to Z_\phi$ による Y の逆像 $Y' \subset Z_{\phi'}$ は $\mathcal{C}'$ の元であることがわかる. $\mathcal{C}''$ を Y' のように $\mathcal{C}$ の元の $Z_{\phi'}$ への逆像として得られる元全体のなす $\mathcal{C}'$ の部分集合とすると,

Lemma 3.1 と $\mathcal{C}$ が Z_ϕ の admissible covering であることから, [1, Proposition 9.1.4/2] により, $\mathcal{C}''$ も $Z_{\phi'}$ の admissible covering であることがわかる. これに伴い, $D_{\phi'}$ は $\{D(Y') \mid Y' \in \mathcal{C}''\}$ を貼り合わせることで得られる.

任意の $Y' \in \mathcal{C}''$ に対し, Lemma 2.1 の議論と同様に, canonical な同型

$$D(Y') \cong D(Y) \times_Y Y'$$

が得られるので, この同型を貼り合わせることで, canonical な同型

$$D_{\phi'} \cong D_\phi \times_{Z_\phi} Z_{\phi'}$$

が得られる. □

Remark 3.1. (1) 一般に, $\mathrm{Max}(R')$ が $\mathrm{Max}(R)$ の affinoid subdomain であるとき, Lemma 3.2 の「$R \to R'$ は flat である」という仮定は満たされる. 第 5 節で eigenvariety machine を構築する際に, weight space と呼ばれる rigid analytic space $\mathcal{W}$ の admissible affinoid subdomains 上の eigenvarieties を $\mathcal{W}$ 上で貼り合わせる際に, Lemma 3.2 を適用することになる.

(2) 「$R \to R'$ は flat である」という仮定が無い場合は, Lemma 3.2 の主張がいつでも成立するとは限らないことの反例として, 次の Example 3.1 が挙げられる.

Example 3.1. Example 1.1 の data に, non-flat な affinoid K-algebra 準同型

$$R = K\langle X,\ Y\rangle \to R' := K; \quad X \mapsto 0,\ Y \mapsto 0$$

を用いて base change を施すと次のようになる:

$$R' = K, \quad M' = K^2,$$
$$\mathbb{T}' = K[\phi',\ t'] \text{ with } \phi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ t := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき,

$$Z_{\phi'} = \mathrm{Max}(K), \quad \mathbb{T}'(Z_{\phi'}) = K$$

であり, とくに,

$$D_{\phi'} = \mathrm{Max}(K)$$

は reduced である. 一方,

$$D_\phi \times_{Z_\phi} Z_{\phi'} = \mathrm{Max}(\mathbb{T}(Z_\phi) \otimes_{R[T]/(1-T^2)} K)$$

は reduced ではないので, $D_{\phi'}$ は $D_\phi \times_{Z_\phi} Z_{\phi'}$ と同型にはならない.

4. Banach R-modules の取り換えとの整合性

R を reduced な affinoid K-algebra とし, $M,\ M'$ を性質 (Pr) をもつ Banach R-modules とする. $\mathbb{T}$ を可換な R-algebra で 2 つの R-algebra 準同型

$$\mathbb{T} \to \mathrm{End}_R(M), \quad \mathbb{T} \to \mathrm{End}_R(M')$$

をもつものとし, ある $\phi \in \mathbb{T}$ が存在して, $\phi : M \to M$ と $\phi : M' \to M'$ が両方とも compact であるとする.

Definition 4.1. (1) 連続な R-module かつ $\mathbb{T}$-module 準同型 $\alpha : M' \to M$ が *primitive link* であるとは, α とは逆向きの compact なある R-module かつ $\mathbb{T}$-module 準同型 $c : M \to M'$ が存在して, 2 つの等式

$$\alpha \circ c = \phi \quad \text{on } M, \qquad c \circ \alpha = \phi \quad \text{on } M'$$

が同時に成立することである．このとき, [2, Lemma 2.12] により, 特性べき級数の等式

$$\det(1 - T\phi|_M) = \det(1 - T\phi|_{M'})$$

が成立する．

primitive link の自明かつ重要な例として, M 上の恒等写像

$$\mathrm{id}_M : M \to M$$

は, $c = \phi$ とおくことで primitive link となることに注意.

(2) 連続な R-module かつ $\mathbb{T}$-module 準同型 $\alpha : M' \to M$ が *link* であるとは, 性質 (Pr) と $\mathbb{T}$-作用をもつある Banach R-modules の有限列

$$M_0 := M',\ M_1,\ \ldots,\ M_n := M$$

と, 各 $i = 0, \ldots, n-1$ に対し, ある primitive link $\alpha_i : M_i \to M_{i+1}$ が存在して,

$$\alpha = \alpha_{n-1} \circ \cdots \circ \alpha_0 : M' \to M$$

が成立することである．

link でつながっている Banach R-modules に付随する eigenvarieties について, 次の補題が成立する:

Lemma 4.1 ([2, Lemma 5.6])**.** *上記の設定で, ある link $\alpha : M' \to M$ が存在するとする．D_ϕ, D'_ϕ をそれぞれ data $(R,\ M,\ \mathbb{T},\ \phi)$, $(R,\ M',\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety とする．このとき, $D_\phi \cong D'_\phi$ である．*

Proof. link は primitive link がつながってできているので, α が prmitive link である場合に証明できればよい．このとき, primitive link の定義から, ある compact な Banach R-module 準同型 $c : M \to M$ が存在して,

$$\alpha \circ c = \phi \quad \text{on } M, \quad c \circ \alpha = \phi \quad \text{on } M'$$

が成立する．[2, Lemma 2.12] により, ϕ の M 上での特性べき級数と M' 上での特性べき級数が一致するので, それぞれに付随する spectral varieties Z_ϕ と Z'_ϕ も一致する．よって, eigenvariety を構成する際に用いられる admissible covering として同一のもの $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ を用いてよい.

$\mathcal{C}$ の任意の connected な元 Y に対し, eigenvariety を構成する貼り合わせと可換な同型

$$D(Y)' \cong D(Y)$$

が得られることを示せれば, 一般の $Y \in \mathcal{C}$ に対しては, Y の $\mathcal{C}$ の有限個の connected な元による disjoint union に沿って貼り合わせることで, eigenvariety の構成と可換な同型 $D(Y)' \cong D(Y)$ が得られて, 補題の主張が示されたことになる．

そのために, $A := \mathcal{O}(f(Y))$ とおき, $M_A := M \otimes_R A,\ M'_A := M' \otimes_R A$ それぞれの直和因子として Y に付随して得られる等しい finite rank をもつ projective A-modules N, N' について, $\alpha_A := \alpha \otimes 1 : M'_A \to M_A$ から同型

$$\alpha_A|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} N$$

が誘導されることを示すことができれば, α は $\mathbb{T}$-module 準同型でもあるので, 同型

$$\mathbb{T}(Y)' \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}(Y); \quad t' \mapsto \alpha \circ t' \circ \alpha^{-1}$$

が得られて, 所望の同型 $D(Y)' \cong D(Y)$ を得ることができる．

N と N' は ϕ の同一の特性べき級数 $F_A(T)$ のある多項式因子 $Q(T) = 1 + a_1 T + \cdots + a_d T^d \in A[T]$ $(a_d \in A^\times)$ を用いて,

$$N = \mathrm{Ker}(Q^*(\phi_A) \text{ on } M), \quad N' = \mathrm{Ker}(Q^*(\phi_A) \text{ on } M')$$

と特徴付けられており, α_A と $c_A := c \otimes 1 : M_A \to M'_A$ はともに A-module かつ $\mathbb{T}$-module 準同型であるので,

$$\alpha_A|_{N'} : N' \to N, \quad c_A|_N : N \to N'$$

となる. 一方, N, N' それぞれの上で, $Q^*(\phi_A) = 0$ であることから,

$$1 = \phi_A \cdot a_d^{-1}(-a_1 - \cdots - \phi_A^{d-1})$$

となり, $\psi := a_d^{-1}(-a_1 - \cdots - \phi_A^{d-1}) \in A[\phi_A]$ とおけば,

$$\psi = \phi_A^{-1} \quad \text{on} \quad N,\ N'$$

である. よって, c_A が $\mathbb{T}$-module 準同型であり,

$$\alpha_A \circ c_A = \phi_A \quad \text{on} \quad M_A, \quad c_A \circ \alpha_A = \phi_A \quad \text{on} \quad M'_A$$

であることから,

$$(\alpha_A|_{N'}) \circ (\psi \circ c_A|_N) = \mathrm{id}_N, \quad (\psi \circ c_A|_N) \circ (\alpha_A|_{N'}) = \mathrm{id}_{N'}$$

が得られるので,

$$\alpha_A|_{N'} : N' \xrightarrow{\sim} N$$

であることが示された. □

5. eigenvariety machine

$\mathcal{W}$ を reduced な rigid analytic space とし, $\mathbb{T}$ を可換環とする. $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain X に対し, $R_X := \mathcal{O}(X)$ とおくと, M_X を性質 (Pr) をもつ Banach R_X-module とし, ある環準同型

$$\mathbb{T} \to \mathrm{End}_{R_X}(M_X)$$

が存在するとする.

任意の $t \in \mathbb{T}$ の $\mathrm{End}_{R_X}(M_X)$ における像を t_X とかくとき, ある $\phi \in \mathbb{T}$ が存在して, 任意の admissible affinoid subdomain $X \subset \mathcal{W}$ に対し,

$$\phi_X : M_X \to M_X$$

は compact であるとする.

また, $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomains の包含関係 $Y \subset X$ に対し, Banach R_Y-modules をつなぐ link

$$\alpha_{YX} : M_Y \to M_X \hat{\otimes}_{R_X} R_Y$$

が存在して, $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomains の包含関係 $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ に対して, R_{X_1}-module 準同型として,

$$\begin{aligned}\alpha_{X_1X_3} = (\alpha_{X_2X_3} \otimes 1) \circ \alpha_{X_1X_2} : M_{X_1} &\to M_{X_2} \hat{\otimes}_{R_{X_2}} R_{X_1} \\ &\to (M_{X_3} \hat{\otimes}_{R_{X_3}} R_{X_2}) \hat{\otimes}_{R_{X_2}} R_{X_1} = M_{X_3} \hat{\otimes}_{R_{X_3}} R_{X_1}\end{aligned}$$

が成立するとする.

以上の設定のもとで, $\mathcal{W}$ 上の data $(\{R_X\}_{X \subset \mathcal{W}},\ \{M_X\}_{X \subset \mathcal{W}},\ \mathbb{T},\ \phi)$ に付随する eigenvariety D_ϕ を, ϕ に付随する $\mathcal{W}$ 上の spectral variety Z_ϕ とともに, 3 つの補題 Lemmas 3.1, 3.2, 4.1 を用いて次のように構成することができる. これを *eigenvariety machine* と呼ぶ:

Theorem 5.1 ([2, Construction 5.7]). 上の状況において, 以下の条件 (i), (ii) を満たす rigid analytic spaces の可換図式

$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & \mathcal{W} & \end{array}$$

が得られる:

(i) D_ϕ は Z_ϕ 上 finite である.

(ii) $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain X に対し, $Z_\phi \times_{\mathcal{W}} X$ と $D_\phi \times_{\mathcal{W}} X$ はそれぞれ, data $(R_X,\ M_X,\ \mathbb{T},\ \phi_X)$ に付随する spectral variety Z_{ϕ_X} と eigenvariety D_{ϕ_X} に canonical に同型である.

Proof. $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomains の包含関係 $Y \subset X$ に対し, link $\alpha_{YX} : M_Y \to M_X \hat{\otimes}_{R_X} R_Y$ が設定されているおかげで, Lemma 4.1 により, data $(R_Y,\ M_Y,\ \mathbb{T},\ \phi_Y)$ に付随する eigenvariety D_{ϕ_Y} と data $(R_Y,\ M_X \hat{\otimes}_{R_X} R_Y,\ \mathbb{T},\ \phi_X \otimes 1)$ に付随する eigenvariety $D_{\phi_X \otimes 1}$ は canonical に同型である.

また, Lemma 3.1 により, spectral varieties の canonical な同型 $Z_{\phi_Y} \cong Z_{\phi_X} \times_X Y$ があり, affinoid subdomain の包含関係 $Y \subset X$ に付随する Banach K-algebra 準同型 $R_X \to R_Y$ は flat であることから, Lemma 3.2 を適用することで, D_{ϕ_Y} は data $(R_X,\ M_X,\ \mathbb{T},\ \phi_X)$ に付随する eigenvariety D_{ϕ_X} の射 $Z_{\phi_Y} \to Z_{\phi_X}$ による pull back $D_{\phi_X} \times_{Z_{\phi_X}} Z_{\phi_Y}$ と canonical に同型であるので,

$$D_{\phi_Y} \cong D_{\phi_X} \times_{Z_{\phi_X}} Z_{\phi_Y} \cong D_{\phi_X} \times_{Z_{\phi_X}} (Z_{\phi_X} \times_X Y) \cong D_{\phi_X} \times_X Y$$

が得られる. 以上をまとめて, eigenvarieties の canonical な同型

$$D_{\phi_X \otimes 1} \cong D_{\phi_Y} \cong D_{\phi_X} \times_X Y$$

が得られた.

さらに, $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomains の包含関係 $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ に対して, links の満たす cocycle condition

$$\alpha_{X_1X_3} = (\alpha_{X_2X_3} \otimes 1) \circ \alpha_{X_1X_2}$$

のおかげで, $\mathcal{W}$ の admissible affinoid subdomains X で添字付けられた rigid analytic spaces のなす可換図式

$$\begin{array}{ccc} D_{\phi_X} & \longrightarrow & Z_{\phi_X} \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

からなる族から, [1, Propositions 9.3.2/1, 9.3.3/1] を用いて, Theorem 5.1 の条件 (i), (ii) を満たす rigid analytic spaces のなす可換図式

$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & \mathcal{W} & \end{array}$$

が得られる. □

eigenvariety D_ϕ の幾何的な性質について, Example 1.1 で見たように, 一般的には D_ϕ が reduced でない場合や $D_\phi \to \mathcal{W}$ が flat でない場合があるなど negative な印象

があるが, Chenevier [3, Proposition 6.4.2] による次の positive な結果があることは重要である:

Proposition 5.2 ([2, Lemma 5.8]). 上の状況で, $\mathcal{W}$ は *equidimensional of dimension* n である, つまり, 任意の irreducible component が同一の次元 n をもつとすると, 次が成立する:

(1) D_ϕ も equidimensional of dimension n である.

(2) D_ϕ の任意の connected component の $D_\phi \to Z_\phi$ による像は, Z_ϕ の connected component である.

(3) D_ϕ の任意の connected component の $D_\phi \to \mathcal{W}$ による像は, $\mathcal{W}$ のある connected component において Zariski dense である.

最後に, eigenvariety の valued point と $\mathbb{T}$ の固有値の system との関係について解説する. $\mathcal{W}$ 上の data $(\{R_X\}_{X\subset\mathcal{W}},\ \{M_X\}_{X\subset\mathcal{W}},\ \mathbb{T},\ \phi)$ とそれに付随する eigenvariety D_ϕ が与えられているとする.

Definition 5.1. (1) L を K 上の完備な拡大体とする. K-algebra 準同型

$$\lambda : \mathbb{T} \to L$$

が $\mathbb{T}$ の固有値の *L-valued system* であるとは,

(i) $\mathcal{W}$ のある admissible affinoid subdomain X と,

(ii) ある L-valued point $x \in X(L)$, つまり, 環準同型 $x : R_X \to L$ と,

(iii) x を用いて得られる完備テンソル積 $M_X \hat{\otimes}_{R_X} L$ のある 0 ではない元 m

が存在して, 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し, $t_X m = \lambda(t)m$ が成立することである.

(2) $\mathbb{T}$ の固有値の L-valued system λ について, $\lambda(\phi) \neq 0$ であるとき, λ は *ϕ-finite* であるという.

Lemma 5.3 ([2, Lemma 5.9]). 上の状況において, ϕ-finite な $\mathbb{T}$ の固有値の L-valued systems 全体のなす集合と, D_ϕ の L-valued points 全体のなす集合 $D_\phi(L)$ の間に全単射が存在する.

Proof. eigenvariety D_ϕ は, $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain X 上の spectral veriety Z_{ϕ_X} の admissible covering $\mathcal{C}_X$ を用いて, $\{D(Y) \mid Y \in \mathcal{C}_X,\ X \subset \mathcal{W}\}$ を貼り合せることで構成されていることに注意.

$\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain X を固定し, 任意の $Y \in \mathcal{C}_X$ をとり, X における Y の像を X' とおく. $M_{R_{X'}}$ の直和因子として Y に付随して得られる finite rank の projective $R_{X'}$-module を N とする.

任意の $P \in X'(L)$ をとり, P の上にある $D(Y)(L)$ の元 P' 全体のなす集合 $\mathcal{S}$ と, P を用いて得られるテンソル積 $N \otimes_{R_{X'},P} L$ の $\mathbb{T}(Y)$-固有ベクトルに付随する $\mathbb{T}$ の固有値の L-valued systems 全体のなす集合 $\mathcal{T}$ との間に全単射を構成できればよい. ここで, $\mathcal{S}$ の条件「P の上にある $D(Y)(L)$ の元 P'」とは, 環準同型からなる図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(Y) & \xrightarrow{P'} & L \\ \nwarrow & \circlearrowright & \nearrow P \\ & R_{X'} & \end{array}$$

を可換にする $D(Y)$ の L-valued point P' のことである. また, Lemma 4.1 の証明でも見たように, $N \subset M_{X'}$ 上で $\phi_{X'}$ は可逆であったので, $\mathcal{T}$ の元は自動的に ϕ-finite であることに注意.

$\mathcal{S}$ は $\mathbb{T}(Y)/P\mathbb{T}(Y)$ の剰余体が L に含まれる極大 ideals 全体のなす集合 $\mathcal{S}'$ と自然に同一視することができる.

一方で, $K' := R_{X'}/P$ とおき, $N \otimes_{R_{X'}} R_{X'}/P = N/PN$ であることに注意して, N が $\mathbb{T}(Y)$-作用をもつことからくる自然な環準同型

$$\mathbb{T}(Y)/P\mathbb{T}(Y) \to \mathrm{End}_{K'}(N/PN)$$

の像を S とおくと, 次の Lemma 5.4 により, 全射 $\mathbb{T}(Y)/P\mathbb{T}(Y) \to S$ から両辺それぞれの環の極大 ideals 全体のなす集合の間に全単射が誘導されるので, とくに, S の剰余体が L に含まれる極大 ideals 全体のなす集合 $\mathcal{T}'$ と $\mathcal{S}'$ の間に全単射が存在する.

任意の $\mathfrak{m} \in \mathcal{T}'$ に対し, $L' := S/\mathfrak{m} \subset L$ とおけば, $N \otimes_{R_{X'}} L'$ は S-module として Artin かつ Noether であるので finite length S-module であり, とくに, $\mathrm{Ass}_S(N \otimes_{R_{X'}} L') = \mathrm{Supp}_S(N \otimes_{R_{X'}} L')$ である. N 上 $\phi_{X'}$ は可逆であったから, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}_S(N \otimes_{R_{X'}} L')$ であり, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}_S(N \otimes_{R_{X'}} L')$ である. よって, 自然な全射 $\lambda_\mathfrak{m} : \mathbb{T} \to S \to L'$ を $\mathbb{T}$ の固有値の L'-valued system とする $N \otimes_{R_{X'}} L'$ に属する固有ベクトルをとることができるので, $\lambda_\mathfrak{m} \in \mathcal{T}$ である.

逆に, $N \otimes_{R_{X'}} L$ への $\mathbb{T}$-作用は S を経由するので, 各 $\lambda \in \mathcal{T}$ に対し, $\mathrm{Ker}(\lambda)$ を含む S の極大 ideal $\mathfrak{m}_\lambda \in \mathcal{T}'$ が得られる. このとき, $\mathrm{Ass}_S(N \otimes_{R_{X'}} L')$ の元がすべて極大 ideal であることから, λ に対し極大 ideal $\mathfrak{m}_\lambda$ がただ 1 つ定まることに注意.

これらの対応 $\mathfrak{m} \mapsto \lambda_\mathfrak{m}$, $\lambda \mapsto \mathfrak{m}_\lambda$ は互いに逆であり, $\mathcal{T}'$ と $\mathcal{T}$ の間の全単射が得られた.

以上をまとめることで, $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ の間の全単射を得ることができた. □

Lemma 5.4 ([2, Lemma 5.10]). *R を可換な Noether 環, N を finite rank をもつ projective R-module とし, T を $\mathrm{End}_R(N)$ の可換な R-subalgebra とする. $\mathfrak{m}$ を R の極大 ideal とし, 環準同型*

$$T/\mathfrak{m}T \to \mathrm{End}_{R/\mathfrak{m}}(N/\mathfrak{m}N); \quad \bar{t} \mapsto (\bar{n} \mapsto \overline{t(n)})$$

の像を S とおく. このとき, 自然な全射 $\varphi : T/\mathfrak{m}T \to S$ のもと, $T/\mathfrak{m}T$ の素 ideals 全体のなす集合と S の素 ideals 全体のなす集合の間の全単射 $\mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p})$ が誘導される. また, この全単射のもと $T/\mathfrak{m}T$ の極大 ideal は S の極大 ideal に対応する.

Proof. $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \sqrt{(0)}$ であることを示せれば, $T/\mathfrak{m}T$ のすべての素 ideals は $\sqrt{(0)}$ を含むので, 補題の主張を示せたことになる.

$\mathfrak{m}$ で局所化をして, $N_\mathfrak{m}$ は finite rank をもつ free $R_\mathfrak{m}$-module であり, [7, Theorems 4.2, 4.4, 4.5] により,

$$R/\mathfrak{m} \cong R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}, \quad N/\mathfrak{m}N \cong N_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}N_\mathfrak{m}, \quad T/\mathfrak{m}T \cong T_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}T_\mathfrak{m}$$

であるので, はじめから N は finite rank をもつ free R-module であるとしてよい.

任意の $\bar{t} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ をとり, $\bar{t}$ の持ち上げ $t \in T$ を 1 つとる. N の free R-basis をとり N 上の t-作用を行列表示すれば, mod $\mathfrak{m}$ すると零行列になるので, すべての成分は $\mathfrak{m}$ の元であり, その特性多項式は monic かつ 最高次係数以外の係数はすべて $\mathfrak{m}$ の元となる. よって, $T/\mathfrak{m}T$ において $\bar{t}$ はべき零である. □

References

[1] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, "Non-Archimedean Analysis," Grundlehren der math. Wissenschaften **261**, 1984.

[2] K. Buzzard, Eigenvarieties, pp. 59-120, *in* "L-functions and Galois Representations" (D. Burns, K. Buzzard and J. Nekovář, Eds.), Cambridge University Press, 2007.

[3] G. Chenevier, Familles p-adiques de formes automorphes pour $\mathrm{GL}(n)$, *J. reine angew. Math.* **570** (2004), 143-217.

[4] R.F. Coleman, P-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417-479.
[5] R.F. Coleman and B. Mazur, The eigencurve, pp. 1-113, *in* "Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry" (A.J. Scholl and R.L. Taylor, Eds.), Cambridge University Press, 1998.
[6] B. Conrad, Modular curves and rigid-analytic spaces, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (1) (2006), 29-110.
[7] H. Matsumura, "Commutative Ring Theory," Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, 1986.
[8] 山上 敦士, Eigencurve について, 第 17 回整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集, 377-402.

Department of Information Systems Science, Soka University, Tokyo, 192-8577, Japan
E-mail address: yamagami@soka.ac.jp