UNITARY GROUP 上の EIGENVARIETY の構成について (BELLAÏCHE-CHENEVIER 第 7.2 節〜第 7.5.1 節前半の概要)

山上 敦士　(創価大学)

Contents

0. **Introduction**

本稿では, Bellaïche-Chenevier の著書 "Families of Galois representations and Selmer groups" [1] の Section 7.2 から Section 7.5.1 前半までに記述されている unitary group 上の eigenvariety の構成について概説する. これは, 中村健太郎氏による概説講演の準備となるものである.

1. 準備

この節では, unitary group 上の eigenvariety を Buzzard [5] により定式化された eigenvariety machine を用いて構成するための状況設定について, [1, Sections 7.2.1, 7.2.2] の内容に沿って概説する.

1.1. **The unitary group** $U(m)$

E を虚 2 次体とし, $c \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ を非自明な E 上の Galois 作用, つまり E 上の複素共役とする. m を自然数とし, $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $U(m)$ を, E^m 上の positive definite

Date: March 15, 2019.

な c-Hermitian form

$$f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{m} z_i c(z'_i)$$

に付随する m-variable unitary group として定義する.

このとき, 任意の $\mathbb{Q}$-algebra A に対して, A-valued points のなす群は

$$U(m)(A) = \{x \in (\mathrm{M}_m(E) \otimes_{\mathbb{Q}} A)^{\times} \mid x \cdot {}^t c(x) = 1\}$$

として与えられる.

以下, $G = U(m)$ とおいて話を進める. $\mathbb{Q}$ の各素点 v における $\mathbb{Q}_v$-valued points のなす群 $G(\mathbb{Q}_v)$ の性質については以下の通り:

(i) $v = \ell < \infty$ が E で分解する場合は, ℓ の E での分解を $(\ell) = w \cdot c(w)$ とおいて, 2 つの完備化

$$E \hookrightarrow E_w = \mathbb{Q}_\ell, \quad E \hookrightarrow E_{c(w)} = \mathbb{Q}_\ell$$

から得られる同型

$$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong E_w \times E_{c(w)} = \mathbb{Q}_\ell \times \mathbb{Q}_\ell$$

により, 同型

$$(\mathrm{M}_m(E) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^{\times} \cong \mathrm{GL}_m(E_w) \times \mathrm{GL}_m(E_{c(w)}) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)$$

が誘導される. よって, $G(\mathbb{Q}_\ell)$ は条件 $x \cdot {}^t c(x) = 1$ で特徴付けられた $(\mathrm{M}_m(E) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^{\times}$ の部分群であることから, c の作用が第 1 成分と第 2 成分の取り替えとして働くことに注意して, 同型

$$\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim}_w G(\mathbb{Q}_\ell); \quad g \mapsto (g,\ {}^t g^{-1})$$

が得られる. 同様に,

$$\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim}_{c(w)} G(\mathbb{Q}_\ell); \quad g \mapsto ({}^t g^{-1},\ g)$$

も得られる. とくに, 合成写像

$$\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim}_w G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim}_{c(w)} \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)$$

のもとで任意の $g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ が

$$g \mapsto {}^t g^{-1}$$

と写されることに注意.

(ii) $v = \ell < \infty$ が E で惰性あるいは分岐する場合は, ℓ の上にある E の素点を w として, $G(\mathbb{Q}_\ell)$ は 2 次拡大 $E_w/\mathbb{Q}_\ell$ に付随する unitary group

$$G(\mathbb{Q}_\ell) = \{x \in \mathrm{GL}_m(E_w) \mid x \cdot {}^t c(x) = 1\}$$

である.

(iii) $v = \infty$ の場合は, 2 つの埋め込み $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ それぞれに関して, 通常の positive definite な unitary group との同型

$$G(\mathbb{R}) \cong \{x \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \mid x \cdot {}^t \bar{x} = 1\}$$

が誘導される. ここで, $\bar{\ }$ は複素共役を表す. とくに, $G(\mathbb{R})$ は compact である.

(iv) $m \not\equiv 2 \pmod 4$ であるときは, $\mathbb{Q}$ のすべての有限素点 ℓ で $G(\mathbb{Q}_\ell)$ は quasi-split である (cf. [1, Proposition 6.2.3 (iii)]).

1.2. **The Hecke algebra $\mathcal{H}$**

p を E で分解する素数とし, 2 つの体の埋め込み

$$\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p, \quad \iota_\infty : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

を固定する. また, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ 上の p 進絶対値 $|\cdot|_p$ を, $\mathrm{ord}_p(p) = 1$ と正規化された $\bar{\mathbb{Q}}_p$ 上の p 進付値 ord_p を用いて $|\cdot|_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\cdot)}$ と定義し, $\mathbb{C}$ 上では通常の複素絶対値 $|\cdot|_\infty$ をとっておく.

ι_p に対応する p の上にある E の素点 v での完備化 $E \hookrightarrow E_v = \mathbb{Q}_p$ から, 第 1.1 節で見た性質 (i) の同型

$$G(\mathbb{Q}_p) \cong_v \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$$

が誘導される. また, ι_∞ に対応する埋め込み $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ から, 第 1.1 節で見た性質 (iii) の同型

$$G(\mathbb{R}) \cong \{x \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \mid x \cdot {}^t\bar{x} = 1\} \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$$

が誘導される. 今後, これらの同型を固定しておく.

以下, G の $\mathbb{Z}$ 上の model を任意に 1 つ固定し, p 以外の素数 ℓ で次の 2 条件を満たすものからなる集合 S_0 を任意に 1 つ固定する:

(i) ℓ は E で分解する. 第 1.1 節で見た性質 (i) の同型 $G(\mathbb{Q}_\ell) \cong_w \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ を 1 つ固定しておく.

(ii) $G(\mathbb{Z}_\ell)$ は $G(\mathbb{Q}_\ell)$ の maximal compact subgroup である.

$\mathbb{A}_{S_0}$ を $\mathbb{Q}$ 上の adele ring $\mathbb{A}$ の S_0-part とし, $\hat{\mathbb{Z}}_{S_0} := \prod_{\ell \in S_0} \mathbb{Z}_\ell \subset \mathbb{A}_{S_0}$ とおく. また, $\mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ を $\mathbb{A}$ の finite part とし, $\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p$ を $\mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ における p の外の部分, さらに, $\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p,S_0}$ を $\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p$ における S_0 の外の部分とする.

$G(\hat{\mathbb{Z}}_{S_0}) \backslash G(\mathbb{A}_{S_0}) / G(\hat{\mathbb{Z}}_{S_0})$ 上の $\mathbb{Z}$ に値をとる compactly supported functions のなす集合を

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ur}} := \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(G(\hat{\mathbb{Z}}_{S_0}) \backslash G(\mathbb{A}_{S_0}) / G(\hat{\mathbb{Z}}_{S_0}),\ \mathbb{Z})$$

とおく.

一方, p-part においては, 固定された同型を通して $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$ と同一視し, *the standard Iwahori subgroup*

$$I := \left\{ x \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p) \;\middle|\; x \equiv \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \pmod{p} \right\} \subset G(\mathbb{Q}_p)$$

に関して bi-invariant な compactly supported functions のなす集合

$$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}\left(I \backslash G(\mathbb{Q}_p) / I,\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$$

を考える.

ここで, bi-invariant な compactly supported functions のなす 2 つの集合 $\mathcal{H}_{\mathrm{ur}}$ と $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}\left(I \backslash G(\mathbb{Q}_p) / I,\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$ は, $G(\mathbb{A})$ 上の Haar measure μ であって, $\mu(\hat{\mathbb{Z}}_{S_0}) = \mu(I) = 1$ と正規化されたものを用いた convolution 積により環の構造をもつことに注意. とくに, 各 $\ell \in S_0$ において, maximal compact subgroup $G(\mathbb{Z}_\ell)$ に付随する the spherical Hecke algebra は可換であるから, $\mathcal{H}_{\mathrm{ur}}$ は可換環となる (cf. [4, Theorem 4.6.1]).

$G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$ の subgroups として,

$B :=$ {all upper triangular matrices in $G(\mathbb{Q}_p)$} (*the upper Borel subgroup*),
$N :=$ {all matrices in B whose all diagonal elements are 1} $\subset B$,
$K := \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ (*the standard maximal compact subgroup*),
$T :=$ {all diagonal matrices in $G(\mathbb{Q}_p)$}$(\cong (\mathbb{Q}_p^\times)^m)$,
$U :=$ {all matrices in T whose all diagonal elements are p-powers with integer exponents},
$T^0 := T \cap K (\cong (\mathbb{Z}_p^\times)^m)$

とおく. また, U の 2 つの submonoids として,

$$U^- := \left\{ \begin{pmatrix} p^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{a_m} \end{pmatrix} \in U \;\middle|\; a_1 \geq \cdots \geq a_m \right\},$$

$$U^{--} := \left\{ \begin{pmatrix} p^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{a_m} \end{pmatrix} \in U \;\middle|\; a_1 > \cdots > a_m \right\}$$

とおく. このとき,

$$B = T \times N = T^0 \times NU, \quad T^0 \subset I \subset K, \quad U \cong T/T^0, \quad U^{--} \subset U^- \subset U \subset T$$

となっている.

Iwahori-Matsumoto [10, Section 3] により, $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}\left(I\backslash G(\mathbb{Q}_p)/I,\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$ において, 任意の $u \in U^-$ に対し, $IuI \in I\backslash G(\mathbb{Q}_p)/I$ 上の characteristic function $[IuI]$ は可逆であることが知られており, すべての $u \in U^-$ に対する $[IuI]$ と $[IuI]^{-1}$ たちで生成される $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}\left(I\backslash G(\mathbb{Q}_p)/I,\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$ の部分環を $\mathcal{A}_p$ とおき, また, $[IuI]$ $(u \in U^-)$ たちだけで生成される $\mathcal{A}_p$ の部分環を $\mathcal{A}_p^-$ とおく. これらの環を *the Atkin-Lehner ring* と呼ぶ.

[1, Proposition 6.4.1 (ii)] で, 環の同型

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}[U^-] \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_p^-; \quad U^- \ni u \mapsto [IuI], \\ &\mathbb{Z}[U] \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_p; \quad U \ni u = ab^{-1}\ (a,\ b \in U^-) \mapsto [IaI][IbI]^{-1} \end{aligned}$$

が得られており, とくに, $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}_p^-$ は可換環である.

以上の設定のもと, 第 3 節で G 上の eigenvariety を構成するために用いる Hecke algebras として,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \mathcal{A}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\mathrm{ur}}, \\ \mathcal{H}^- &:= \mathcal{A}_p^- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\mathrm{ur}} \end{aligned}$$

とおく.

Definition 1.1 (=[1, Definition 7.2.2]). 環 A に対し, 環準同型 $\mathcal{H} \to A$ のことを *A-valued system of Hecke eigenvalues* という.

1.3. The weight space $\mathcal{W}$

[8, Section 1.1] で解説されているように, complete Noether local ring $\mathbb{Z}_p[\![(\mathbb{Z}_p^\times)^m]\!]$ に対し, Belthelot の構成を適用して得られる $\mathbb{Q}_p$ 上の rigid analytic space を $\mathcal{W}$ とおき, *weight space* と呼ぶ. このとき, 任意の affinoid $\mathbb{Q}_p$-algebra A に対し, A-valued points のなす集合 $\mathcal{W}(A)$ は自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gp.cont.}}((\mathbb{Z}_p^\times)^m,\ A^\times)$$

と同一視される. とくに, 自然な同型

$$(\mathbb{Z}_p^\times)^m \cong ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)^m \times (1+p\mathbb{Z}_p)^m$$

を通して, $\mathcal{W}$ は $(p-1)^m$ 個の open unit m-dimensional balls の disjoint union と同型となる.

次の単射により, $\mathbb{Z}^m$ を $\mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$ の部分集合とみなしておく:

$$\mathbb{Z}^m \hookrightarrow \mathcal{W}(\mathbb{Q}_p); \quad (k_1,\dots,k_m) \mapsto ((x_1,\dots,x_m) \mapsto x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}).$$

とくに, $\mathbb{Z}^m$ の部分集合

$$\mathbb{Z}^{m,-} := \{(k_1,\dots,k_m) \mid k_1 \geq \cdots \geq k_m\},$$
$$\mathbb{Z}^{m,--} := \{(k_1,\dots,k_m) \mid k_1 > \cdots > k_m\}$$

を定義しておく.

1.4. p-refined automorphic representations

Definition 1.2 (=[1, Lemma 6.2.5, Definition 6.2.6])**.** G 上の *automorphic forms* のなす空間を

$$A(G) := \{f : X := G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} :\ \text{function} \mid \text{smooth},\ G(\mathbb{R})\text{-finite}\}$$

と定義する. ここで, complex valued function $f : X \to \mathbb{C}$ が $G(\mathbb{R})$-*finite* であるとは, すべての $g \in G(\mathbb{R})$ による f の *right translations*

$$(g\cdot f)(x) := f(xg) \quad (x \in X)$$

たちで生成される $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間

$$\langle g\cdot f \mid g \in G(\mathbb{R})\rangle_{\mathbb{C}}$$

が有限次元であることを意味する.

$G(\mathbb{A})$ の元による right translation により, $A(G)$ は $G(\mathbb{A})$ の表現空間となり, $G(\mathbb{A})$ のすべての irreducible admissible representations の同型類の代表たち π を走る直和

$$A(G) = \bigoplus_{\pi} \pi^{m(\pi)}$$

として分解される. ここで, $m(\pi)$ は π の重複度を表す.

$G(\mathbb{A})$ の irreducible admissible representation π について, 上の分解における π の同型類の重複度 $m(\pi)$ が $m(\pi) \neq 0$ であるとき, π は *automorphic* であるという.

[1, Corollary 6.2.7] で, $G(\mathbb{R})$ の finite dimensional な irreducible representations が $\bar{\mathbb{Q}}$ 上定義されていることを用いて, $G(\mathbb{A})$ の irreducible admissible automorphic reprensetation π は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上で定義されていることが示されている.

Definition 1.3 (=[1, Definition 7.2.1])**.** $\underline{k}=(k_1,\dots,k_m)\in\mathbb{Z}^{m,-}$ を 1 つとる. $G(\mathbb{A})$ の irreducible admissible automorphic representation π と, 順序付けられた $(\mathbb{C}^\times)^m$ の元 $\mathcal{R}=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ の組 $(\pi,\mathcal{R})$ が *p-refined automorphic representation of weight* $\underline{k}$ であるとは, 次の 3 条件を満たすことをいう:

(i) π の ∞-part π_∞ は positive definite な unitary group $G(\mathbb{R})$ の表現として, 対角行列のなす部分群

$$T(\mathbb{R}):=\left\{\begin{pmatrix}z_1&&\\&\ddots&\\&&z_m\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})\;\middle|\;|z_i|_\infty=1\right\}\subset G(\mathbb{R})$$

の highest weight $(k_1,\dots,k_m)$ に付随する character

$$\delta_{\underline{k}}:T(\mathbb{R})\to\mathbb{C}^\times;\quad\begin{pmatrix}z_1&&\\&\ddots&\\&&z_m\end{pmatrix}\mapsto z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}$$

に対応する $G(\mathbb{R})$ の irreducible representation $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ と同型である (cf. $G(\mathbb{R})$ の finite dimensional な irreducible representations の highest weights による分類や $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ の構成については, [12, Sections 19-21] を参照のこと).

(ii) π の p-part π_p は *unramified* である. つまり, non-zero で K-invariant なベクトルが存在する.

(iii) $\mathcal{R}$ は π_p の *accessible refinement* である. つまり, $\mathcal{R}$ に付随する T の unramified character χ を, $\chi|_{T^0}:=1$ (この条件が unramified であることを意味する), かつ, 任意の $i=1,\dots,m$ に対し,

$$\chi\left(\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&p&(\leftarrow&i\text{-th})\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\right):=\varphi_i$$

とおいて, 積に関して T 上に延長することで定義し, さらに N 上で値 1 をとらせることで, χ を B 上の character とみなすとき, π_p は $\mathrm{Ind}_B^{G(\mathbb{Q}_p)}(\chi)$ の subrepresentation として得られる. この条件は, B の *the modular character*

$$\delta_B:B\to\mathbb{C}^\times;\quad\begin{pmatrix}b_1&*&\cdots&*&*\\0&b_2&\cdots&*&*\\0&0&\cdots&*&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&b_m\end{pmatrix}\mapsto|b_1|_p^{m-1}|b_2|_p^{m-3}\cdots|b_m|_p^{1-m}$$

が $\delta_B|_{T^0}=1$ であることに注意して, $U\cong T/T^0$ の character $\chi\delta_B^{-\frac{1}{2}}$ が U の表現として π_p の I-invariant part π_p^I の subrepresentation であることと同値であることが [1, Definitions 6.4.5, 6.4.6] に解説されている.

このとき, $\mathcal{R}=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ は, the local Langlands correspondence で π_p に対応する Weil-Deligne representation $L(\pi_p)$ に対する geometric Frobenius element の eigenvalues たちを並べたものになっている (cf. [1, Sections 6.3, 6.4.3]).

Definition 1.4 (=[1, Definition 7.2.3]). p-refined automorphic representation $(\pi, \mathcal{R})$ of weight $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ に付随する $\bar{\mathbb{Q}}_p$-valued system of Hecke eigenvalues

$$\psi_{(\pi,\mathcal{R})} : \mathcal{H} = \mathcal{A}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\mathrm{ur}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$$

を次のように定義する:

まず, $\mathcal{A}_p$-part について, Definition 1.3 (iii) で見たように, π_p の accessible refinement $\mathcal{R}$ に付随する U の character χ について,

$$\chi\delta_B^{-\frac{1}{2}} : U \to \mathbb{C}^\times$$

は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上定義された U の表現 π_p^I の subrepresentation であるので, ι_∞ を通して $\mathbb{C}$ に埋め込まれた $\bar{\mathbb{Q}}$ に値をもつことがわかる.

また, $\pi_\infty \cong W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ に付随する $T(\mathbb{R})$ の the highest weight character $\delta_{\underline{k}}$ を, $T(\mathbb{R})$ 上からそのままの定義で $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の対角行列全体のなす部分群上に延長したものを U 上に制限することで, U の $\mathbb{Q}$-valued character

$$\delta_{\underline{k}} : U \to \mathbb{Q}; \quad \begin{pmatrix} p^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{a_m} \end{pmatrix} \mapsto p^{a_1 k_1 + \cdots + a_m k_m}$$

が定まる.

よって, U の 2 つの characters の積 $\chi\delta_B^{-\frac{1}{2}}\delta_{\underline{k}}$ を, [1, Proposition 6.4.1 (ii)] で示された環の同型 $\mathbb{Z}[U] \cong \mathcal{A}_p$ を通して環の準同型に延長することで,

$$\psi_p : \mathcal{A}_p \to \bar{\mathbb{Q}} \overset{\iota_\infty}{\hookrightarrow} \mathbb{C} \quad \text{with} \quad \psi_p|_U = \chi\delta_B^{-\frac{1}{2}}\delta_{\underline{k}}$$

が得られる.

次に, $\mathcal{H}_{\mathrm{ur}}$-part については, S_0 に属する各素点 ℓ に対し, $G(\mathbb{Z}_\ell)$ は $G(\mathbb{Q}_\ell)$ の maximal compact subgroup であり, ほとんどすべての $\ell \in S_0$ に対して存在する $\pi_\ell^{G(\mathbb{Z}_\ell)}$ の non-zero spherical vectors の Hecke eigenvalues を用いて, 環の準同型

$$\psi_{\mathrm{ur}} : \mathcal{H}_{\mathrm{ur}} \to \mathbb{C}$$

が得られる. [1, Corollary 6.2.7] で示されているように, π は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上定義されていることから, ψ_{ur} は ι_∞ を通して $\mathbb{C}$ に埋め込まれた $\bar{\mathbb{Q}}$ に値をもつことがわかる.

以上により, 環準同型

$$\psi_p \otimes \psi_{\mathrm{ur}} : \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{Q}} \overset{\iota_\infty}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$$

が定まり, $\iota_p \circ \iota_\infty^{-1}$ と合成することで, p-refined automorphic representation $(\pi, \mathcal{R})$ of weight $\underline{k}$ に付随する $\bar{\mathbb{Q}}_p$-valued system of Hecke eigenvalues を

$$\psi_{(\pi,\mathcal{R})} := \iota_p \circ \iota_\infty^{-1} \circ (\psi_p \otimes \psi_{\mathrm{ur}}) : \mathcal{H} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$$

と定義する.

第 2 節以降で構成される G 上の eigenvariety は, p-refined automorphic representations に付随する $\bar{\mathbb{Q}}_p$-valued systems of Hecke eigenvalues を parametrize する rigid analytic space である.

2. G 上の eigenvariety X

この節では, [1] で構成された G 上の eigenvariety がどのような性質をもつものであるかについて, [1, Sections 7.2.3, 7.3.1] の内容に沿って概説する.

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathcal{H}, \bar{\mathbb{Q}}_p) \times \mathbb{Z}^m$ の部分集合 $\mathcal{Z}_0$ を

$$\mathcal{Z}_0 := \{(\psi_{(\pi,\mathcal{R})}, \underline{k}) \mid \underline{k} \in \mathbb{Z}^{m,-},\ (\pi, \mathcal{R}) : p\text{-refined automorphic representation of weight } \underline{k}\}$$

と定義する. 以下, $\mathcal{Z}_0$ の部分集合 $\mathcal{Z}$ を 1 つ固定しておく.

locally constant で compactly supported な任意の idempotent

$$e \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p,S_0}), \bar{\mathbb{Q}}) \otimes 1_{\mathcal{H}_{\mathrm{ur}}} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p}), \bar{\mathbb{Q}}) \text{ (satisfying } e^2 = e)$$

を 1 つ固定して,

$$\mathcal{Z}_e := \{(\psi_{(\pi,\mathcal{R})}, \underline{k}) \in \mathcal{Z} \mid e(\pi^p) \neq 0\}$$

とおく. $\mathcal{Z}_e$ の条件を満たす p-refined automorphic representation π は *type* e であるという. 以下, $\mathcal{Z}_e \neq \emptyset$ であると仮定する.

また, 固定している $\bar{\mathbb{Q}}_p$ において, $\mathbb{Q}_p$ の finite extension L で

$$\iota_p \circ e \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p}), L)$$

であるものを 1 つとっておく. 今後, $\iota_p \circ e$ や $\iota_\infty \circ e \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p}), \mathbb{C})$ のことを記号を濫用して単に e とかくことにする. また, 今後登場する rigid analytic space たちはすべて L 上で定義されているものとする.

次の定理が本稿の主定理となるものであり, 定理の主張にある 4 つ組 $(X,\ \psi,\ \omega,\ Z)$ を G 上の *eigenvariety for* $\mathcal{Z}_e$ と呼ぶ:

Theorem 2.1 (=[1, Definition 7.2.5, Theorem 7.3.1])**.** *上記の設定のもと, ある L 上定義された reduced な rigid analytic space X と, ある*

$$\begin{aligned} &\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{O}(X) : \ \text{ring homomorphism}, \\ &\omega : X \to \mathcal{W} : \ \text{rigid analytic map}, \\ &Z \subset X(\bar{\mathbb{Q}}_p) : \ \text{accumulation Zariski dense subset} \end{aligned}$$

で次の 6 条件を満たすものが存在する. ただし, $Z \subset X(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ が accumulation Zariski dense subset であるとは, X の任意の irreducible component と Z は共有点をもち, 任意の $z \in Z$ に対し, X における z のある affinoid open neighborhoods の basis $\{U\}$ で, $U \cap Z$ が U で Zariski dense になるものが存在することである (ここで, rigid analytic open は Zariski open であるとは限らないことに注意):

(i) $u_0 := \begin{pmatrix} p^{m-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & p^{m-i} & (\leftarrow & i\text{-th}) \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in U^{--}$ *とおき, [1, Proposition 6.4.1 (ii)] の同型を通して, $[Iu_0I] \in \mathcal{A}_p^\times$ と同一視する. このとき,*

$$\nu := (\omega,\ \psi(u_0)^{-1}) : X \to \mathcal{W} \times_L \mathbb{G}_{\mathrm{m},L}^{\mathrm{an}}$$

は finite map である. ここで, $\mathbb{G}_{\mathrm{m},L}^{\mathrm{an}}$ は L 上の rigid analytic な affine line $\mathbb{A}_L^{1,\mathrm{an}}$ から原点を取り除いて得られる Zariski open subvariety であり, affine algebraic variety $\mathrm{Spec}(L[\zeta, \zeta^{-1}])$ の rigid analytification を表す (cf. [3, Example 9.3.4/4]).

(ii) $\mathcal{W} \times_L \mathbb{G}_{\mathrm{m},L}^{\mathrm{an}}$ の任意の affinoid subdomain V に対し, 環準同型

$$((\text{the restriction to } \nu^{-1}(V)) \circ \psi) \otimes \nu^* : \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(\nu^{-1}(V))$$

は全射である.

(iii) 写像

$$X(\bar{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(\mathcal{H},\ \bar{\mathbb{Q}}_p); \quad x \mapsto (\psi_x : h \mapsto \psi(h)(x))$$

を用いて定まる写像

$$Z \to \mathcal{Z}_0; \quad z \mapsto (\psi_z,\ \omega(z))$$

は $\mathcal{Z}_0$ の部分集合 $\mathcal{Z}_e$ への全単射

$$Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_e$$

となる (この全単射により, eigenvariety X は type e の p-refined automorphic representations $\mathcal{Z}_e$ を parametrize するとみなす).

(iv) X は equidimensional of dimension m であり, $\nu(X) \subset \mathcal{W} \times_L \mathbb{G}_{\mathrm{m},L}^{\mathrm{an}}$ は Fredholm hypersurface である. さらに, X は 次の 2 条件を満たす affiniod subdomains Ω たちからなる admissible covering をもつ:

(a) $\omega(\Omega) \subset \mathcal{W}$ は affinoid subdomain である.

(b) $\omega|_{\Omega} : \Omega \to \omega(\Omega)$ を Ω の任意の irreducible component に制限すると, その像に対して finite map となる.

(v) 任意の $i = 1, \ldots, m$ に対し, $u_i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & p & (\leftarrow \ i\text{-th}) \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in U$ を, [1, Proposition 6.4.1 (ii)] の同型を通して $[Iu_iI] \in \mathcal{A}_p^{\times}$ と同一視して, $F_i := \psi(u_i) \in \mathcal{O}(X)^{\times}$ とおく.

Z' を次の 3 条件を満たす点 $z' \in X(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ のなす $X(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ の部分集合とする:

(a) $\omega(z') = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^{m,--}$ である.

(b) 任意の $i = 1, \ldots, m-1$ に対し,

$$\mathrm{ord}_p(F_1(z') \cdots F_i(z')) < k_i - k_{i+1} + 1$$

が成り立つ.

(c) 任意の $i = 1, \ldots, m$ に対し, $\varphi_i'(z') := F_i(z') p^{-k_i + i - 1}$ とおくと, 任意の $i \neq j$ に対し,

$$\varphi_i'(z') {\varphi_j'}^{-1}(z') \neq p$$

が成り立つ.

このとき, $Z' \subset Z$ であり, かつ, X の accumulation Zariski dense subset である.

(vi) $\psi(\mathcal{H}_{\mathrm{ur}}) \subset \mathcal{O}(X)^0 := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid |f(x)|_p \leq 1 \text{ for all } x \in X\}$ である.

ここで, X の任意の affinoid subdomain U に対して restriction map $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(U)$ が continuous となるような $\mathcal{O}(X)$ の the coarsest locally convex topology に関して, $\mathcal{O}(X)^0$ は compact であることに注意 (cf. [1, Lemma 7.2.11]).

Remark 2.1. (1) Theorem 2.1 (iii) で見たように, eigenvariety X で parametrize される p-refined automorphic representations $(\pi, \mathcal{R})$ が type e であるという条件付けは, 第 5 節で定義される "minimal eigenvariety" X を構成する際に idempotent e を適切に選んでおくことによって, p と異なる素数 ℓ で π_ℓ に付随する Weil-Deligne representation の monodromy が大きくならないように抑える効果があり (cf. [1, Propositions 7.5.6-7.5.7]), X 上の Galois representations の family を用いた Selmer group の non-trivial な元の構成という [1] の主目的を果たすうえで重要な条件付けとなる (cf. 中村健太郎氏による [1, Section 8] の概説を参照のこと).

(2) Theorem 2.1 (v) は Z' が Z の部分集合であることを保証するものであり, とくに, 条件 (b) は後ほど第 3.4 節で考察する "finite slope をもつ" p-adic autormorphic forms と classical automorphic forms との関係と深く関わるものである.

Remark 2.2 (=[1, Definition 7.2.13])**.** Theorem 2.1 (v) で定義された部分集合 $Z' \subset Z$ の任意の点 z' に対し, Theorem 2.1 (iii) で対応する $\bar{\mathbb{Q}}_p$-valued system of Hecke eigenvalues $\psi_{z'}$ が付随する p-refined automorphic representation of weight

$$\omega(z) = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^{m,--}$$

を $(\pi,\ \mathcal{R})$ とする. このとき, $\chi(u_i) = \varphi_i$ として定まる U の character χ を用いて,

$$\psi_{z'} = \psi_{(\pi,\mathcal{R})} = \iota_p \iota_\infty^{-1}(\psi_p \otimes \psi_{\mathrm{ur}}) \quad \text{with} \quad \psi_p|_U = \chi \delta_B^{-\frac{1}{2}} \delta_{\underline{k}}$$

と表されるので, 任意の $i = 1, \ldots, m$ に対し,

$$\begin{aligned} F_i(z') = \psi(u_i)(z') = \psi_{z'}(u_i) &= \psi_{(\pi,\mathcal{R})}(u_i) \\ &= \iota_p \iota_\infty^{-1}(\psi_p(u_i)) \\ &= \iota_p \iota_\infty^{-1}(\chi(u_i)\delta_B^{-\frac{1}{2}}(u_i)\delta_{\underline{k}}(u_i)) \\ &= \iota_p \iota_\infty^{-1}(\varphi_i |p|_p^{i-\frac{m+1}{2}} p^{k_i}) \end{aligned}$$

となる. よって, π_p の accessible refinement $\mathcal{R} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ と, Theorem 2.1 (v) (c) で定義された値 $\varphi'_1(z'), \ldots, \varphi'_m(z')$ の関係式

$$\begin{aligned} \iota_p \iota_\infty^{-1}(\mathcal{R}|p|_p^{\frac{1-m}{2}}) &= (\iota_p \iota_\infty^{-1}(\varphi_1 |p|_p^{\frac{1-m}{2}}), \ldots, \iota_p \iota_\infty^{-1}(\varphi_i |p|_p^{\frac{1-m}{2}}), \ldots, \iota_p \iota_\infty^{-1}(\varphi_m |p|_p^{\frac{1-m}{2}})) \\ &= (F_1(z')p^{-k_1}, \ldots, F_i(z')p^{-k_i+i-1}, \ldots, F_m(z')p^{-k_m+m-1}) \end{aligned}$$

が得られる.

この関係式は, [1, Conjecture 6.8.1 (Rep(m))] で存在が想定されている π に付随する Galois representation ρ_π に対し, crystalline representation $\rho_\pi|_{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/E_v)}$ に付随する the crystalline Frobenius の eigenvalues を並べたものであり, 第 4 節で定義される "minimal eigenvariety" X に Galois representations の family を付随させて [1, Definition 4.2.3] の意味での "refined p-adic Galois representations の family" とみなすための重要なものである. (cf. eigenvariety 上の Galois representations の family や "refined p-adic Galois representations の family" については, 中村健太郎氏による [1, Sections 7.5.2-7.5.4] の概説を参照).

3. X の構成

この節では, Buzzard [5] により定式化された "eigenvariety machine" を用いて, Theorem 2.1 で主張されている性質を満たす eigenvariety がどのように構成されるかについて, [1, Section 7.3.2-7.3.6] の内容に沿って概説する.

ここで, Buzzard [5] の eigenvariety machine について, 簡単に振り返りたい. そのために, この振り返りの間だけ記号の設定は, 筆者による [5, Section 5] の概説講演の内容をまとめた報告集原稿 “Eigenvariety machine の構成について” のものとする.

reduced な rigid analytic space $\mathcal{W}$ 上の data $(\{R_X\}_{X\subset\mathcal{W}},\ \{M_X\}_{X\subset\mathcal{W}},\ \mathbb{T},\ \phi)$ に対し, eigenvariety machine [5, Construction 5.7] により, ϕ に付随する $\mathcal{W}$ 上の spectral variety Z_ϕ と上の data に付随する $\mathcal{W}$ 上の eigenvariety D_ϕ からなる rigid analytic spaces の可換図式

$$\begin{array}{ccc} D_\phi & \longrightarrow & Z_\phi \\ & \searrow \ \circlearrowright \ \swarrow & \\ & \mathcal{W} & \end{array}$$

を構成することができる. このとき, 次の 2 つの条件が成立する:

(i) D_ϕ は Z_ϕ 上 finite である.

(ii) $\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain X に対し, $Z_\phi\times_{\mathcal{W}} X$ と $D_\phi\times_{\mathcal{W}} X$ はそれぞれ, data $(R_X,\ M_X,\ \mathbb{T},\ \phi_X)$ に付随する spectral variety Z_{ϕ_X} と eigenvariety D_{ϕ_X} に同型である.

とくに, $\mathcal{W}$ が equidimensional of dimension m であるとき, Chenevier [6, Proposition 6.4.2] により次の 3 つの主張が証明されている (cf. これらは [5, Lemma 5.8] にまとめられている):

(1) D_ϕ も equidimensional of dimension m である.

(2) D_ϕ の任意の connected component の $D_\phi\to Z_\phi$ による像は, Z_ϕ の connected component である.

(3) D_ϕ の任意の connected component の $D_\phi\to\mathcal{W}$ による像は, $\mathcal{W}$ のある connected component において Zariski dense である.

また, eigenvariety の valued point と $\mathbb{T}$ の固有値の system との関係について, [5, Lemma 5.9] で, ϕ-finite な $\mathbb{T}$ の固有値の L-valued systems 全体のなす集合と, D_ϕ の L-valued points 全体のなす集合 $D_\phi(L)$ の間に全単射が存在することが示されている.

さて, 記号の設定を本稿の第 2 節のものに戻して, Bellaïche-Chenevier [1, Section 7.3.2-7.3.6] による eigenvariety X の構成について話を進めよう.

以下の第 3.1 節から第 3.5 節で展開される構成内容とそこで用いられる記号を説明無しに先取りして述べてしまうならば, Buzzard [5] の eigenvariety machine を適用して所望の eigenvariety X を得るための weight space $\mathcal{W}$ 上の data

$$(\{A(V)\}_{V\subset\mathcal{W}},\ \{\mathcal{S}(V,r),\ r\geq r_V\}_{\mathcal{V}\subset\mathcal{W}},\ \mathcal{H}^-,\ u_0)$$

を構成することが本節の主目的である.

Remark 3.1. (1) data の中に並べられている Banach $A(V)$-modules $\mathcal{S}(V,r)$ たちは, *the space of p-adic automorphic forms of weight in V, radius of convergence r and type e* と呼ばれるもので, 各 V ごとに整数 $r\geq r_V$ で添え字付けられてはいるが, $\mathcal{S}(V,r)$ への u_0 の作用に p-adic Riesz theory を適用することで $\mathcal{S}(V,r)$ の直和因子として切り出される projective $A(V)$-module は, V だけに依存して r には依存せずに定まる (cf. p-adic Fredholm theory と p-adic Riesz theory については, 三枝洋一氏の概説講演と三原朋樹氏による報告集原稿 “保型形式の p 進族について” を参照のこと).

(2) $\mathcal{S}(V,r)$ には $\mathcal{H}$ 全体ではなくその部分環である $\mathcal{H}^-$ しか作用することができないため, data の中に並べられる Hecke algebra として, $\mathcal{H}$ ではなく $\mathcal{H}^-$ が用いられて

いるが, (1) で述べた $r \geq r_V$ に依存しない projective $A(V)$-modules 上では, u_0 が可逆に作用することから, 結果的に $\mathcal{H}$ 全体が作用することになる (cf. 第 3.4 節での U^- の元と U^{--} の元の積に関する計算を参照のこと).

3.1. The family of the U^--stable principal series of the Iwahori subgroup

第 1 節と第 2 節で設定された記号を本節以降でも継続して使用することにして, $M := IU^-I$ とおくと, [1, Proposition 6.4.1 (i)] で M は $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$ の submonoid であることが示されている.

上で見た eigenvariety machine を適用したい data の中にある the space $\mathcal{S}(V, r)$ of p-adic automorphic forms of weight in V, radius of convergence r and type e を次節で定義するための準備として, 本節では *U^--stable principal series of the Iwahori subgroup* と呼ばれる M-module $\mathcal{C}(V, r)$ を定義する.

V を $\mathcal{W}$ の admissible affinoid subdomain もしくは closed point とする. V に付随する tautological な character

$$\chi_V : T^0(\cong (\mathbb{Z}_p^\times)^m) \to A(V)^\times; \quad t \mapsto (V \ni v \mapsto v(t))$$

は $A(V)$-valued map として continuous であるので, $\chi|_{(1+p^{r+1}\mathbb{Z}_p)^m}$ が $A(V)$-valued analytic map となるような最小の非負整数 $r =: r_V$ をとることができる.

$$B = T^0 \times NU$$

であることに注意して, χ_V を NU 上では値 1 をとらせることで, B の character に延長することができる.

また, 対角成分がすべて 1 である下三角行列全体からなる I の subgroup を $\bar{N}_0$ とおくと, $G(\mathbb{Q}_p)$ において

$$IB = \bar{N}_0 B$$

であることに注意して, 任意の整数 $r \geq r_V$ に対し, 次の $A(V)$-module を定義することができる:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(V, r) := \{f : IB(= \bar{N}_0 B) \to A(V) :\ \text{map} \mid f(xb) = \chi_V(b) f(x)\ (x \in IB,\ b \in B),\\ f|_{\bar{N}_0} :\ r\text{-analytic}\}.\end{aligned}$$

ここで, $f|_{\bar{N}_0} : \bar{N}_0 \to A(V)$ が *r-analytic* であるとは, 任意の $a \in \bar{N}_0$ に対し, $A(V)$-valued map

$$f_a : \bar{N}_0 \to A(V); \quad n \mapsto f(an)$$

を p 倍写像 $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} p\mathbb{Z}_p$ を通して得られる集合としての全単射

$$(\mathbb{Z}_p)^{\frac{m(m-1)}{2}} \xrightarrow{\sim} \bar{N}_0; \quad (n_{ij})_{m \geq i > j \geq 1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ pn_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ pn_{31} & pn_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ pn_{m1} & pn_{m2} & \cdots & pn_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}$$

と合成することで, $(\mathbb{Z}_p)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ 上の $(n_{ij})_{m \geq i > j \geq 1}$ を変数とする map

$$f_a : (\mathbb{Z}_p)^{\frac{m(m-1)}{2}} \to A(V)$$

とみなしたとき, 定義域の部分集合 $(p^r\mathbb{Z}_p)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ に制限すると $A(V)$ 上の Tate algebra $A(V) \left\langle \left(\dfrac{n_{ij}}{p^r} \right)_{m \geq i > j \geq 1} \right\rangle$ の元として表されることをいう.

このとき, $a \in \bar{N}_0$ が動くたびに変数変換されることに注意して, 定義域を

$$(p^r\mathbb{Z}_p)^{\frac{m(m-1)}{2}} = \bigsqcup_{i_1,\dots,i_{\frac{m(m-1)}{2}}=0,p^r,\dots,p^r(p^r-1)} (i_1+p^{2r}\mathbb{Z}_p)\times\cdots\times(i_{\frac{m(m-1)}{2}}+p^{2r}\mathbb{Z}_p)$$

と $p^{r\frac{m(m-1)}{2}}$ 個の領域に分割することで, $\mathcal{C}(V,r)$ は $A(V)\langle(n_{ij})_{m\geq i>j\geq 1}\rangle^{p^{r\frac{m(m-1)}{2}}}$ と同一視されることから, $\mathcal{W}$ が reduced であることに注意して, 各 $f \in \mathcal{C}(V,r)$ に対し, $A(V)\langle(n_{ij})_{m\geq i>j\geq 1}\rangle$ での sup norm $|\cdot|$ を用いて, norm

$$|f| := \sup_{a\in\bar{N}_0}|f_a|$$

が定まり, $\mathcal{C}(V,r)$ はこの norm に関して $A(V)\langle(n_{ij})_{m\geq i>j\geq 1}\rangle^{p^{r\frac{m(m-1)}{2}}}$ と isometric な orthonormalizable $A(V)$-Banach module となる.

$M^{-1}IB \subset IB$ であることに注意して, 任意の $m \in M$ と $f \in \mathcal{C}(V,r)$ に対し,

$$(m\cdot f)(x) := f(m^{-1}x) \quad (x\in IB)$$

と定義することで, M による $\mathcal{C}(V,r)$ 上の $A(V)$-linear action が定まる. とくに, 任意の $u = \begin{pmatrix} p^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{a_m}\end{pmatrix} \in U^{--}$ と $n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ n_{31} & n_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n_{m1} & n_{m2} & \cdots & n_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} \in \bar{N}_0$ に対し,

$$u^{-1}nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p^{a_1-a_2}n_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ p^{a_1-a_3}n_{31} & p^{a_2-a_3}n_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p^{a_1-a_m}n_{m1} & p^{a_2-a_m}n_{m2} & \cdots & p^{a_{m-1}-a_m}n_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}$$

であり, 任意の $f \in \mathcal{C}(V,r)$ と $a,\ n' \in \bar{N}_0$ に対し,

$$\begin{aligned}(u\cdot f)_a(n') &= (u\cdot f)(an') \\ &= f(u^{-1}(an')u\cdot u^{-1}) \\ &= \chi_V(u^{-1})f(u^{-1}(an')u)\end{aligned}$$

となり, $a_1 > \cdots > a_m$ であるので, $u \in U^{--}$ による $\mathcal{C}(V,r)$ への作用は compact である.

M の $A(V)$-linear action をもつ orthonormalizable Banach $A(V)$-modules の family

$$\{\mathcal{C}(V,r),\ r\geq r_V\}_{V\subset\mathcal{W}}$$

について, admissible affinoid subdomain もしくは closed point からなる包含関係 $V' \subset V$ に対し, 関数の restriction から得られる map $\mathcal{C}(V,r)\to\mathcal{C}(V',r)$ から, M-equivariant な $A(V')$-isomorphism

$$\mathcal{C}(V,r)\hat{\otimes}_{A(V)}A(V') \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(V',r)$$

が誘導される. また, $p^{-r}n_{ij} = p^{-(r+1)}\cdot pn_{ij}$ より, r-analytic な map は $(r+1)$-analytic でもあるので, M-equivariant かつ compact な inclusion

$$\mathcal{C}(V,r) \hookrightarrow \mathcal{C}(V,r+1)$$

が得られる．とくに, 任意の $u \in U^{--}$ と $r \geq r_V$ に対し, compact な map による可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(V, r+1) & \xrightarrow{u\cdot} & \mathcal{C}(V, r+1) \\ \cup\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow\cup \\ \mathcal{C}(V, r) & \xrightarrow{u\cdot} & \mathcal{C}(V, r) \end{array}$$

が得られる．

3.2. p-Adic automorphic forms of weight in V, radius of convergence r and type e

本節では, 前節で定義された $\{\mathcal{C}(V,r),\ r \geq r_V\}_{V\subset\mathcal{W}}$ を用いて, the spaces of p-adic automorphic forms of weight in V, radius of convergence r and type e の family $\{\mathcal{S}(V,r),\ r \geq r_V\}_{V\subset\mathcal{W}}$ を構成する．記号は前節までのものを引き続き使用する．

$\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain もしくは closed point V と任意の整数 $r \geq r_V$ に対し,

$$\begin{aligned} F(\mathcal{C}(V,r)) := \{f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathrm{f}) \to \mathcal{C}(V,r) :\ \text{map} \mid \\ f(1\times h_p)g = h_p^{-1}\cdot f(g)\ (g \in G(\mathbb{A}_\mathrm{f}),\ h_p \in I(\subset M)), \\ f :\ \text{smooth outside } p\} \end{aligned}$$

とおく．ここで, $1 \times h_p \in G(\mathbb{A}_\mathrm{f})$ は, p-成分が h_p で, 他の素点での成分はすべて 1 である元を表す．また, f が *smooth outside* p であるとは, $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ のある open compact subgroup による right translation のもと invariant であるという意味である．

任意の $g \in G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ と $f \in F(\mathcal{C}(V,r))$ に対し, $g \cdot f \in F(\mathcal{C}(V,r))$ を

$$(g\cdot f)(x) := f(xg)$$

とおくことで, $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ の $F(\mathcal{C}(V,r))$ への左作用が定まり, $\mathcal{H}_\mathrm{ur}$ の $F(\mathcal{C}(V,r))$ への Hecke 作用を定義することができる．

一方で, $\mathcal{C}(V,r)$ が M-module であることと, $U^- \subset M$ が $\mathcal{A}_p^-$ を [1, Proposition 6.4 (iii)] の同型 $\mathbb{Z}[U^-] \cong \mathcal{A}_p^-$ を通して生成することから, $\mathcal{A}_p^-$ の $F(\mathcal{C}(V,r))$ への作用が自然に定まり, $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ の作用と $\mathcal{A}_p^-$ の作用は可換であることがわかる．

ここで, 第 2 節で固定した idempotent

$$e \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^{p,S_0}), L) \otimes 1_{\mathcal{H}_\mathrm{ur}} \subset \mathcal{C}_\mathrm{c}(G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p), L)$$

を用いて,

$$\mathcal{S}(V,r) := e(F(\mathcal{C}(V,r))) \subset F(\mathcal{C}(V,r))$$

とおくと,

$$F(\mathcal{C}(V,r)) = \mathcal{S}(V,r) \oplus (1-e)F(\mathcal{C}(V,r)); \quad f = ef + (f - ef)$$

と分解されるので, $\mathcal{S}(V,r)$ は $F(\mathcal{C}(V,r))$ の直和因子である．

また, e の S_0-成分は $1_{\mathcal{H}_\mathrm{ur}}$ であるから, $\mathcal{H}_\mathrm{ur}$ の元と可換であり, $\mathcal{A}_p^-$ の $F(\mathcal{C}(V,r))$ への作用は, $F(\mathcal{C}(V,r))$ の元たちの値域である $\mathcal{C}(V,r)$ への U^- の作用を用いて定義されているので, e と $\mathcal{H}^- = \mathcal{A}_p^- \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{H}_\mathrm{ur}$ の $F(\mathcal{C}(V,r))$ への作用は可換である．よって, $\mathcal{S}(V,r)$ は $\mathcal{H}^-$-module である．

e が locally constant で compactly supported であることから, $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^{p,S_0})$ の open compact subgroup K'^{p,S_0} を十分小さくとって, $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ の open compact subgroup として $K' := I \times K'^{p,S_0} \times G(\hat{\mathbb{Z}}_{S_0})$ とおくと, $\mu(I) = 1$ と正規化しているので,

$$e \cdot e_{K'^p} = e, \quad e_{K'^p}\cdot e_{K'} = e_{K'^p}$$

とできて,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(V,r) &= e(F(\mathcal{C}(V,r)))\\ &= e(e_{K'^p}(F(\mathcal{C}(V,r))))\\ &= e(e_{K'^p}(e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r)))))\\ &\subset e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r)))\end{aligned}$$

となり, $\mathcal{S}(V,r)$ は $e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r)))$ の直和因子になる. ここで, 文脈上しかるべき素点のなす集合 S と $G_{\mathbb{A}_S}$ の open compact subgroup K'' に対し, $e_{K''}$ は locally constant で compactly supported な $G(\mathbb{A}_S)$ 上の functions のなす環における idempotent

$$e_{K''}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(K'')} & (x \in K''), \\ \\ 0 & (x \notin K'') \end{cases}$$

を表している.

[1, Section 6.2.3] で注意されているように, Borel [4] により double cosets の集合 $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K'$ は有限集合であることが示されており, その剰余類の個数を $h_{K'}$ とおく. 完全代表系 $\{x_1, \ldots, x_{h_{K'}}\}$ を固定し,

$$\Gamma_i := (x_i^{-1} G(\mathbb{Q}) x_i) \cap K'$$

とおくと, $G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{A})$ の中で discrete であり (cf. [13, Theorem IV.2]), $G(\mathbb{R})$ は compact であるから, 任意の $i = 1, \ldots, h_{K'}$ に対し, Γ_i は $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ の finite subgroup となる. したがって, $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p,S_0})$ の open compact subgroup $K'^{p.S_0}$ をさらに十分に小さく取り直すことで, 任意の $i = 1, \ldots, h_{K'}$ に対し,

$$\Gamma_i = \{1\}$$

とすることができる.

Haar measure が left invariant であることから, 任意の $f \in F(\mathcal{C}(V,r))$ と $\alpha \in G(\mathbb{Q})$, $i = 1, \ldots, h_{K'}$, $k \in K'$ に対し,

$$e_{K'} f(\alpha x_i k) = e_{K'} f(x_i)$$

となるので, L-linear map

$$e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r))) \to \mathcal{C}(V,r)^{h_{K'}}; \quad e_{K'} f \mapsto ((e_{K'} f)(x_1), \cdots, (e_{K'} f)(x_{h_{K'}}))$$

は injective である.

さらに, 任意の $i = 1, \ldots, h_{K'}$ に対し, $\Gamma_i = \{1\}$ であることから, 上で固定された剰余類分解

$$G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) = \bigsqcup_{i=1}^{h_{K'}} G(\mathbb{Q}) x_i K'$$

における各剰余類 $G(\mathbb{Q}) x_i K'$ の元は $\alpha x_i k$ ($\alpha \in G(\mathbb{Q})$, $k \in K'$) の形に unique に表されることと, K' の p-成分が ${K'}_p = I$ であり, p の外では K'^p が $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ の open compact subgroup であることから, 任意の $(c_1, \ldots, c_{h_{K'}}) \in \mathcal{C}(V,r)^{h_{K'}}$ に対し, 写像

$$f : G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) \to \mathcal{C}(V,r); g = \alpha x_i k \mapsto k_p^{-1} \cdot f(x_i) \quad (\alpha \in G(\mathbb{Q}),\ k \in K')$$

は well-defined で $F(\mathcal{C}(V,r))$ の元であることがわかり, 任意の $i = 1, \ldots, h_{K'}$ に対し,

$$(e_{K'} f)(x_i) = c_i$$

となるので,

$$e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r))) \to \mathcal{C}(V,r)^{h_{K'}}; \quad e_{K'}f \mapsto ((e_{K'}f)(x_1), \cdots, (e_{K'}f)(x_{h_{K'}}))$$

は L-isomorphism である.

前節でみたように, $\mathcal{C}(V,r)$ は $A(V)\langle (n_{ij})_{m\geq i>j\geq 1}\rangle^{p^{r\frac{m(m-1)}{2}}}$ と isometric な orthonormalizable $A(V)$-Banach module であるので, 任意の $f \in e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r)))$ に対し, 上の L-isomorphism を通して $\mathcal{C}(V,r)$ の norm を用いて定義される norm

$$|f| := \max_{1\leq i\leq h_{K'}} \{|f(x_i)|\}$$

により, $e_{K'}(F(\mathcal{C}(V,r)))$ は $\mathcal{C}(V,r)^{h_{K'}}$ と isometric な orthonormalizable $A(V)$-Banach module となる. よって, その直和因子である $\mathcal{S}(V,r)$ は Buzzard [5, Section 2] により導入された性質 (Pr) をもつ $A(V)$-Banach module となる.

Definition 3.1. $\mathcal{S}(V,r)$ を *p-adic automorphic forms of weight in V, and radius of convergence r and type e* の空間という.

上でみたように, $\mathcal{S}(V,r)$ は $\mathcal{H}^-$ による $A(V)$-linear action と性質 (Pr) をもつ $A(V)$-Banach module である. とくに, 任意の $u \in U^{--}$ は, 前節でみたように $\mathcal{C}(V,r)$ 上に compact に作用することから, $\mathcal{S}(V,r)$ にも compact に作用する.

前節の最後でみた orthonormalizable Banach $A(V)$-modules の family $\{\mathcal{C}(V,r),\ r \geq r_V\}_{V\subset\mathcal{W}}$ がもつ性質を引き継いで, 性質 (Pr) をもつ Banach $A(V)$-modules の family

$$\{\mathcal{S}(V,r),\ r \geq r_V\}_{V\subset\mathcal{W}}$$

は次の性質をもつことがわかる:

admissible affinoid subdomain もしくは closed point からなる包含関係 $V' \subset V$ に対し, $\mathcal{H}^-$-equivariant な $A(V')$-isomorphism

$$\mathcal{S}(V,r)\hat{\otimes}_{A(V)}A(V') \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(V',r)$$

が誘導される. これは, Buzzard [5, Section 5] により導入された "link" と呼ばれる map の役割を果たすものであることに注意.

さらに, $\mathcal{H}^-$-equivariant かつ compact な inclusion

$$\mathcal{S}(V,r) \hookrightarrow \mathcal{S}(V,r+1)$$

が得られて, 任意の $u \in U^{--}$ と $r \geq r_V$ に対し, compact な map による可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V,r+1) & \xrightarrow{u\cdot} & \mathcal{S}(V,r+1) \\ \cup\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow\cup \\ \mathcal{S}(V,r) & \xrightarrow{u\cdot} & \mathcal{S}(V,r) \end{array}$$

が得られる.

3.3. The subspaces of classical automorphic forms

この節では, p-adic automorhic forms の空間における classical automorphic forms からなる部分空間について概説する. 前節で用いた記号をそのまま使用する.

任意の continuous character $\psi : T(\cong (\mathbb{Q}_p^\times)^m) \to L^\times$ に対し, $\psi|_{(1+p^{r+1}\mathbb{Z}_p)^m}$ が L-valued analytic map となるような最小の非負整数 $r =: r_\psi$ をとることができる.

第 3.1 節で定義された the U^--stable principal series of the Iwahori subgroup と同様に, 任意の整数 $r \geq r_\psi$ に対し, 次の orthonormalizable Banach L-space が定義される:

$$i_B^{IB}(\psi, r) := \{f : IB(= \bar{N}_0 B) \to L :\ \text{map} \mid f(xb) = \psi(b)f(x)\ (x \in IB,\ b \in B),$$
$$f|_{\bar{N}_0} :\ r\text{-analytic}\}.$$

ここで, ψ を N 上では 1 を取るようにして, B の character に延長していることに注意.

$m \in M$ の $f \in i_B^{IB}(\psi, r)$ への作用を

$$(m \cdot f)(x) := f(m^{-1}x)$$

により定義する.

もう 1 つ任意の continuous character $\psi' : T \to L^\times$ をとると, 任意の $r \geq r_\psi, r_{\psi'}$ に対し, L-isomorphism

$$i_B^{IB}(\psi, r) \xrightarrow{\sim} i_B^{IB}(\psi'\psi, r);\quad f \mapsto (x \mapsto \psi'(x)f(x))$$

から, M-equivariant な isomorphism

$$i_B^{IB}(\psi, r) \otimes \psi'^{-1} \xrightarrow{\sim} i_B^{IB}(\psi'\psi, r)$$

が誘導される. ここで, ψ' を $M = IU^-I \to U^- \hookrightarrow T$ を通して M の character とみなしていることに注意.

さて, 任意の $\underline{k} \in \mathbb{Z}^{m,-}$ に対し, $T(\mathbb{R})$ の the highest weight $\underline{k}$ に付随する $G(\mathbb{R})$ の irreducible representation $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ が $W_{\underline{k}}(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ として $\mathbb{Q}$ 上定義されることに注意して, $G(\mathbb{Q}_p)$ の irreducible representation $W_{\underline{k}}(\mathbb{Q}_p) := W_{\underline{k}}(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の B に関する highest weight vector v を 1 つ固定する.

$W_{\underline{k}}(L) := W_{\underline{k}}(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ の dual space $W_{\underline{k}}(L)^* := \mathrm{Hom}_L(W_{\underline{k}}(L),\ L)$ の任意の元 φ に対し,

$$f_\varphi : IB \to L;\quad x \mapsto \varphi(x \cdot v)$$

とおくと, 任意の $x \in IB,\ b \in B$ に対し,

$$f_\varphi(xb) = \varphi((xb) \cdot v) = \delta_{\underline{k}}(b)\varphi(x \cdot v) = \delta_{\underline{k}}(b)f_\varphi(x)$$

となる. また, f_φ を $\bar{N}_0$ に制限したとき, $W_{\underline{k}}(L)$ が $G(\mathbb{Q}_p)$ の algebraic representation であることから, 任意の $x \in \bar{N}_0$ における値 $f_\varphi(x) = \varphi(x \cdot v)$ は x の各成分を変数とする L-係数の多項式として表されるので, $f_\varphi|_{\bar{N}_0}$ は 0-analytic となる. よって,

$$f_\varphi \in i_B^{IB}(\delta_{\underline{k}}, 0)$$

であり, L-linear map

$$W_{\underline{k}}(L)^* \to i_B^{IB}(\delta_{\underline{k}}, 0)$$

が定まる. 任意の $m \in M$ の $\varphi \in W_{\underline{k}}(L)^*$ への作用が

$$(m \cdot \varphi)(v') = \varphi(m^{-1} \cdot v)\quad (v' \in W_{\underline{k}}(L))$$

で与えられることから, 上の L-linear map は M-equivariant である.

さらに, IB の各成分を変数とする L-係数の多項式関数が IB 上で恒等的に値が 0 であれば, $G(\mathbb{Q}_p)$ 上の関数とみても恒等的に値が 0 であることと, highest weight vector v は non-zero であり, $G(\mathbb{Q}_p) \cdot v$ が irreducible reprensetation $W_{\underline{k}}(L)$ を生成することから, 上の map は M-equivariant な L-linear injection である.

一方で, W の closed point $V=\{\underline{k}\}$ に付随する continuous character $\chi_V=\chi_{\underline{k}}$ は $\delta_{\underline{k}}|_{T^0}$ と等しく, $(1+p\mathbb{Z}_p)^m$ 上で analytic であるので $r_V=r_{\underline{k}}=0$ である. B 上で

$$\delta_{\underline{k}}=\chi_{\underline{k}}\cdot(\delta_{\underline{k}}|_U)$$

であることに注意して, 上の M-equivariant な L-linear injection の両辺で M の作用を $\delta_{\underline{k}}$ で捻ることで, M-equivariant な L-linear injection

$$W_{\underline{k}}(L)^*\otimes\delta_{\underline{k}}\hookrightarrow i_B^{IB}(\chi_{\underline{k}},0)=\mathcal{C}(\underline{k},0)$$

が得られる.

Definition 3.2. 任意の $r\geq 0$ に対し, 上の injection から得られる $\mathcal{H}^-$-equivariant な L-linear injection

$$e(F(W_{\underline{k}}(L)^*\otimes\delta_{\underline{k}}))\hookrightarrow\mathcal{S}(\underline{k},0)\hookrightarrow\mathcal{S}(\underline{k},r)$$

の $\mathcal{S}(\underline{k},r)$ における像を *the subspace of classical automorphic forms of weight* $\underline{k}$ という. これは, $\mathbb{Q}$ 上定義されている古典的な $\mathbb{C}$-係数の automorphic forms of weight $\underline{k}$ の空間を, $\iota_p\circ\iota_\infty^{-1}$ を通して $\bar{\mathbb{Q}}_p$ 内で係数を L に拡大し, M の作用を $\delta_{\underline{k}}$ で捻ったものと同型であることに注意.

3.4. **The finite slope subspace**

本節では, "finite slope をもつ" という概念を導入し, p-adic autormorphic form を 1 つとったとき, それが classical automorphic form であるかどうかを判定する条件について概説する. これは, Theorem 2.1 (v) に深く関係するものである. 前節まで使用していた記号をそのまま用いる.

Definition 3.3. $\underline{k}\in\mathbb{Z}^{m,-}$, $r\geq 0$ をとる. p-adic automorphic form $f\in\mathcal{S}(\underline{k},r)$ of weight $\underline{k}$, radius of convergence r and type e が *finite slope* をもつとは, ある $u\in U^{--}$ が存在して, 次の 2 つの条件を満たすことをいう:

(i) $\mathcal{S}(\underline{k},r)$ の subspace $L[u]\cdot f$ は finite dimensional である.
(ii) $u|_{L[u]\cdot f}$ は invertible である.

finite slope をもつ p-adic automorphic forms 全体のなす $\mathcal{S}(\underline{k},r)$ の L-subspace を $\mathcal{S}(\underline{k},r)^{\mathrm{fs}}$ とおく.

任意の $f\in\mathcal{S}(\underline{k},r)^{\mathrm{fs}}$ に対し, $u\in U^{--}$ が付随しているとして, 2 つの条件 (i), (ii) により, Cayley-Hamilton の定理から $(u|_{L[u]\cdot f})^{-1}\in L[u]$ であることがわかる. 任意の $h\in\mathcal{H}^-$ に対し, h と u は p-adic automorphic forms に可換に作用するので,

$$L[u]\cdot(h\cdot f)=h\cdot(L[u]\cdot f)$$

も finite dimensional であり, $L[u]\cdot(h\cdot f)$ 上で u は invertible となる. よって, $h\cdot f$ も finite slope をもつことになり, $\mathcal{S}(\underline{k},r)^{\mathrm{fs}}$ は $\mathcal{H}^-$-module である.

また, 上の u を $u=\begin{pmatrix}p^{a_1}&&\\&\ddots&\\&&p^{a_m}\end{pmatrix}$ $(a_1>\cdots>a_m)$ とおいて, 任意の $u'\in U^-$ を $u'=\begin{pmatrix}p^{b_1}&&\\&\ddots&\\&&p^{b_m}\end{pmatrix}$ $(b_1\geq\cdots\geq b_m)$ におけば, 任意の $i=1,\ldots,m-1$ で

$k > \dfrac{b_i - b_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}$ となる整数 k をとることで,

$$u'' := \begin{pmatrix} p^{ka_1 - b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{ka_m - b_m} \end{pmatrix} \in U^{--}, \quad u^k = u'' u'$$

とできるので, $L[u] \cdot f$ 上で u が invertible であることから u' も invertible であることが引き継がれる. よって, $\mathcal{S}(\underline{k}, r)^{\mathrm{fs}}$ は $\mathcal{H}$-module である.

さらに, $e(F(W_{\underline{k}}(L)^* \otimes \delta_{\underline{k}}))$ は L 上 finite dimensional で $\mathcal{H}$-module であるから, $\mathcal{H}$-equivariant な L-linear injection

$$e(F(W_{\underline{k}}(L)^* \otimes \delta_{\underline{k}})) \hookrightarrow \mathcal{S}(\underline{k}, r)^{\mathrm{fs}}$$

が得られる.

次の定理が, finite slope をもつ p-adic automorphic forms について, それが classical であるかどうかの判定条件を与える "control theorem" と呼ばれるものであり, その判定条件は Theorem 2.1 (v) において Z' が Z の部分集合になることを保証する条件の 1 つ (b) そのものである:

Theorem 3.1 (=[1, Proposition 7.3.5])**.** $f \in \mathcal{S}(\underline{k}, r)^{\mathrm{fs}} \otimes_L \bar{\mathbb{Q}}_p$ をすべての $u \in U$ に対する同時固有ベクトルとし, 任意の $i = 1, \ldots, m$ に対し, $u_i \cdot f = \lambda_i f$ ($\lambda_i \in \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$) とおく (ここで, u_i が invertible であることから $\lambda_i \neq 0$ であることに注意).

もし, 任意の $i = 1, \ldots, m-1$ で,

$$\mathrm{ord}_p(\lambda_1 \cdots \lambda_i) < k_i - k_{i+1} + 1$$

ならば, f は classical である.

Remark 3.2. Theorem 3.1 の証明の詳細については [1, Section 7.3.5] をご参照いただきたいが, 証明の方針を粗く述べるならば, p-adic autormorphic forms のなす空間の classical automorphic forms のなす部分空間による商空間において, $u_1 \cdots u_i$ の operator norm が $p^{-(k_i - k_{i+1} + 1)}$ 以下であることを証明することで, f の固有値の p 進付値に関する条件から, f の商空間における像が 0 であることが示されるという粗筋である.

3.5. **The eigenvariety machine**

本節では前節までの準備のもと, Theorem 2.1 の性質を満たす eigenvariety X を構成するために, Buzzard [5, Construction 5.7] の eigenvariety machine をどのように適用するかについて概説する.

Definition 3.1 の直後でみたように, $\mathcal{H}^-$ の作用と性質 (Pr) をもつ Banach $A(V)$-modules の family

$$\{\mathcal{S}(V, r),\ r \geq r_V\}_{V \subset \mathcal{W}}$$

において, U^{--} の元はすべて compact に作用することと, admissible affinoid subdomain もしくは closed point からなる包含関係 $V' \subset V$ に対し, Buzzard [5, Section 5] の意味での "link" の役割を果たす $\mathcal{H}^-$-equivariant な $A(V')$-isomorphism

$$\mathcal{S}(V, r) \hat{\otimes}_{A(V)} A(V') \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(V', r)$$

があることに注意して, とくに, Theorem 2.1 の条件 (i) にある

$$u_0 = \begin{pmatrix} p^{m-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & p^{m-i} & (\leftarrow & i\text{-th}) \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in U^{--}$$

を用いた $\mathcal{W}$ 上の data

$$\{\{A(V)\}_{V\subset\mathcal{W}},\ \{\mathcal{S}(V,r)\ r\geq r_V\}_{\mathcal{V}\subset\mathcal{W}},\ \mathcal{H}^-,\ u_0\}$$

に Buzzard の eigenvariety machine を適用する. その概要は以下の通りである:

$\mathcal{W}$ の任意の admissible affinoid subdomain V と任意の $r\geq r_V$ に対し, compact な map による可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V,r+1) & \xrightarrow{u_0\cdot} & \mathcal{S}(V,r+1) \\ \cup\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow\cup \\ \mathcal{S}(V,r) & \xrightarrow{u_0\cdot} & \mathcal{S}(V,r) \end{array}$$

があるので, u_0 の $\mathcal{S}(V,r)$ 上の特性べき級数

$$P_V(T) := \det(1-Tu_0|_{\mathcal{S}(V,r)}) \in 1+TA(V)\{\{T\}\}$$

が [5, Lemma 2.12] により r に依存せずに定まる.

$$Z(P_V)\subset V\times_L \mathbb{A}_L^{1,\mathrm{an}}$$

を定義方程式 $P_V(T)=0$ で定まる closed subspace とする.

Buzzard [5, Theorem 4.7] により, $Z(P_V)$ の affinoid subdomains による admissible covering $\mathcal{C}^*$ で次の性質を満たすものが存在する: first projection $\mathrm{pr}_1 : V\times\mathbb{A}_L^{1,\mathrm{an}}\to V$ のもと, 任意の $\Omega^*\in\mathcal{C}^*$ に対して,

(i) $\mathrm{pr}_1(\Omega^*)$ は V の affinoid subdomain である.
(ii) $\mathrm{pr}_1 : \Omega^*\to\mathrm{pr}_1(\Omega^*)$ は finite map である.

任意の $\Omega^*\in\mathcal{C}^*$ に対し, $V' := \mathrm{pr}_1(\Omega^*)$ は V の affinoid subdomain であり, [5, Section 5] で解説されているように, $A(V')\{\{T\}\}$ における r に依存しない $P_{V'}(T)$ の多項式因子 $Q(T)\in 1+A(V')[T]$ で, 最高次係数が $A(V')^\times$ の元であり, かつ,

$$A(\Omega^*) = A(V')[T]/(Q(T))$$

となるものが存在する.

このとき, 任意の $r'\geq r_{V'}$ に対し, $\mathcal{H}^-$-stable な Banach $A(V)$-submodules による直和分解

$$\mathcal{S}(V',r') = S(\Omega^*)\oplus N(\Omega^*,r')$$

で, 次の条件を満たすものが存在する:

(i) $S(\Omega^*)$ は r に依存せずに定まる projective $A(V')$-module of rank $\deg Q$ である.
(ii) $\det(1-Tu_0|_{S(\Omega^*)}) = T^{\deg Q}Q\left(\dfrac{1}{T}\right)$ $(=: Q^{\mathrm{rec}}(T))$ である.
(iii) $Q^{\mathrm{rec}}(u_0)$ は $S(\Omega^*)$ 上 0 であり, $N(\Omega^*,r')$ 上 invertible である.

とくに, (ii) より, u_0 は $S(\Omega^*)$ 上 invertible であるので, $\mathcal{H}$ が $S(\Omega^*)$ に作用することになり, ring homomorphism

$$\mathcal{H} \to \mathrm{End}_{A(V')}(S(\Omega^*))$$

が得られる. このとき, この homomorphism の像は finite Banach $A(V')$-algebra であり, それに付随する affinoid variety を Ω とおくと, $S(\Omega^*)$ は finite $A(\Omega)$-module で, ring homomorphism

$$\psi_\Omega : \mathcal{H} \to A(\Omega)$$

と finite な $A(V')$-algebra homomorphisms のなす可換図式

$$\begin{array}{ccc} A(\Omega^*) & \longrightarrow & A(\Omega) \\ \nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow \\ & A(V') & \end{array}$$

から, affinoid varieties の間の finite map

$$\nu_\Omega : \Omega \to \Omega^*$$

が得られる.

以上の状況で, $\mathcal{W}$ の admissible affinoid subdomains V と $Z(P_V)$ の admissible covering $\mathcal{C}^*$ の元 Ω^* を動かすことで,

$$\{\Omega,\ \psi_\Omega : \mathcal{H} \to A(\Omega),\ \nu_\Omega : \Omega \to \Omega^*\}_{V' \subset V \subset \mathcal{W}}$$

を貼り合わせて, u_0 に付随する spectral variety Z_{u_0} 上の rigid analytic space として, Theorem 2.1 の 6 条件を満たす eigenvareity

$$\nu : X \to Z_{u_0}$$

と ring homomorphism

$$\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{O}(X)$$

が得られる. このとき, 貼り合わせに用いられた Ω たち全体を $\mathcal{C}$ とおくと, $\mathcal{C}$ は X の admissible covering となることに注意.

Remark 3.3. この X が Theorem 2.1 の 6 条件を満たすことの証明については, [1, Section 7.3] と, そこで引用されている [6, Theorem A] を参照のこと. とくに, Theorem 2.1 (v) で Z' が Z の部分集合になることは, Theorem 3.1 から導かれることに注意.

4. The minimal eigenvariety containing π

本節では, G の p-refined automorphic representation $(\pi, \mathcal{R})$ を 1 つ固定したうえで, "minimal eigenvariety containing π " なるものの構成について概説する. これは, [1, Chapter 8] である Selmer group の non-trivial な元が構成される際に用いられるものであり, その内容については, 中村健太郎氏の概説講演をご参照いただきたい. 前節までに使用された記号をここでもそのまま用いることにする.

E で non-split な任意の素数 ℓ において, π_ℓ は "non-monodromic principal series" であるか, もしくは, unramified であると仮定する.

ここで "non-monodromic principal series" の定義を述べることはしないが, [1, Conjecture 6.8.1 (Rep(m))] で想定されている π に付随する Galois representation ρ_π について, π_ℓ が non-monodromic principal series であれば, $\rho_\pi|_{W_{E_w}}$ に付随する Weil-Deligne representation が trivial monodromy をもつとされていることに注意. ただし, w は ℓ の上にある E の素点の 1 つで, W_{E_w} は E_w の Weil group を表す.

S を p と π_ℓ が ramified であるような素数 ℓ 全体からなる有限集合とする. さらに, S に属する $\ell \neq p$ のうち, E で non-split で, かつ, π_ℓ が non-monodromic principal series であるようなもの全体からなる S の部分集合を S_N とおく.

前節までで eigenvariety X を構成するために用いられていた素数の集合 S_0 について, 以下では, S_0 は Dirichlet density 1 であると仮定し, $S_N \cap (S_0 \cup \{p\}) = \emptyset$ となるようにしておく.

また, X を構成するために用いていた idempotent e について,

$$e = \bigotimes_{\ell \in S} e_\ell \quad \text{with} \quad e_\ell^2 = e_\ell \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_\ell), \bar{\mathbb{Q}})$$

の形で, 各 e_ℓ が次のように定められているものと仮定する:

(i) $\ell \in S_N$ のとき, π_ℓ の "inertial class" Σ_ℓ に付随する "Bernstein component" に対応する "special" な idempotent e_{Σ_ℓ} を e_ℓ とする (ここで, 用いられている術語たちについては, [1, Example 7.3.3] を参照のこと).

(ii) $\ell \in S \setminus (S_N \cup \{p\})$ であるとき, π に課している仮定から ℓ は E で分解する. $(\ell) = w \cdot c(w)$ を E での分解として, $G(\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_\ell)$ と同一視し, π_ℓ に対して [1, Proposition 6.5.3] で得られている $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_\ell)$ の $\bar{\mathbb{Q}}$ 上 finite dimensional な irreducible representation τ_ℓ に付随する idempotent e_{τ_ℓ} を e_ℓ とする.

ここで, e_{τ_ℓ} は $G(\mathbb{Z}_\ell)$ の外では値 0 をとり, $G(\mathbb{Z}_\ell)$ 上では $\dfrac{\dim_{\bar{\mathbb{Q}}} \tau_\ell}{\mu(G(\mathbb{Z}_\ell))} \mathrm{tr}(\tau_\ell^*)$ の値をとる idempotent を表す (τ_ℓ がどのような性質をもつかについては, [1, Proposition 6.5.3] を参照のこと).

Remark 4.1. 上で設定された idempotent e の重要な役割として, この状況で構成される eigenvariety for $\mathcal{Z}_e$ で parametrize される p-refined automorphic representaions π' について, $\ell \in S \setminus \{p\}$ で π_ℓ に付随する Weil-Deligne representation の monodromy が, 本節の始めに固定された π に付随するものと比べて小さくなるように e が設定されており, [1, Chapter 8] において, ある Selmer 群の non-trivial な元を構成するにあたり本質的な役割を果たすことになる (cf. [1, Proposition 8.2.10]). 詳しくは中村健太郎氏による概説講演を参照のこと.

ここで, $\bar{\mathbb{Q}}_p$ における $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 L を, 各 e_ℓ と $\iota_p \circ \iota_\infty^{-1} \circ \pi_f$ が L 上で定義されるほどに十分大きくとっておく.

以上の設定のもと, 前節までの eigenvariety X for $\mathcal{Z}_e$ の構成を適用したうえで, $(\psi_{(\pi',\mathcal{R}')}, \underline{k}') \in \mathcal{Z}_e$ で, 任意の $\ell \in S_N$ に対し, π'_ℓ が non-monodromic principal series であるようなもの全体からなる $\mathcal{Z}_e$ の部分集合を $\mathcal{Z}_{e,N}$ とおき, X における $\mathcal{Z}_{e,N}$ の Zariski closure を X_N とおく.

このとき, [1, Proposition 7.4.8] により, $(X_N, \psi|_{X_N}, \omega|_{X_N}, Z \cap X_N)$ は eigenvariety for $\mathcal{Z}_{e,N}$ であり, X_N は X のいくつかの irreducible components の union となっていることが示されている.

Definition 4.1 (=[1, Definition 7.5.2])**.** eigenvariety X_N for $\mathcal{Z}_{e,N}$ を *the minimal eigenvariety containing* π という.

References

[1] J. Bellaïche and G. Chenevier, "Families of Galois representations and Selmer groups," Astérisque **324**, 2009.

[2] A. Borel, Automorphic L-functions, pp. 27-61, *in* "Automorphic forms, representations and L-functions," Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977, vol. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.

[3] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, "Non-Archimedean Analysis," Grundlehren der math. Wissenschaften **261**, 1984.
[4] D. Bump, "Automorphic forms and representations," Cambridge studies in advanced mathematics **55**, Cambridge University Press, 1996.
[5] K. Buzzard, Eigenvarieties, pp. 59-120, *in* "L-functions and Galois Representations" (D. Burns, K. Buzzard and J. Nekovář, Eds.), Cambridge University Press, 2007.
[6] G. Chenevier, Familles p-adiques de formes automorphes pour GL(n), *J. reine angew. Math.* **570** (2004), 143-217.
[7] R.F. Coleman, P-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), 417-479.
[8] R.F. Coleman and B. Mazur, The eigencurve, pp. 1-113, *in* "Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry" (A.J. Scholl and R.L. Taylor, Eds.), Cambridge University Press, 1998.
[9] B. Conrad, Modular curves and rigid-analytic spaces, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (1) (2006), 29-110.
[10] N. Iwahori and H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **25** (1965), 5-48.
[11] H. Matsumura, "Commutative Ring Theory," Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, 1986.
[12] M. Taylor, "Lectures on Lie Groups," http://www.unc.edu/math/Faculty/met/m273.pdf
[13] A. Weil, "Basic Number Theory," Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Third Edition, 1974.
[14] 山上 敦士, Eigencurve について, 第 17 回整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集, 377-402.

Department of Information Systems Science, Soka University, Tokyo, 192-8577, Japan
E-mail address: yamagami@soka.ac.jp