

ON WILD QUOTIENT SINGULARITIES

伊藤 浩行

1. 序

正標数の代数多様体を扱う際にしばしば問題となるのが“野生的”現象である。群作用による商を考えると、群の位数が標数で割り切れる場合にこのような野性的状況となる。分岐被覆を考えると野性的分岐や野生的ファイバーの問題となり、商特異点を考えると野性的商特異点の問題となるが、標数 0 とは異なり正標数特有の病理現象が起こることがあり、しばしば標数 0 の証明が適用できず解析が困難である。

本稿では、2次元の正標数商特異点に関してその野生的群作用で得られる場合について最近までの結果を述べる。尚、本研究は S. Schröer 氏 (Düsseldorf) との共同研究であり、また、科学研究費 24540051 の援助を受けている。

本稿を通して k で標数 $p \geq 0$ の代数的閉体を表し、 q で標数 p のべきを表すこととする。特異点一般の用語等については石井 [10] 等を参照のこと。

2. 商特異点

A を剰余体が k に同型であるネーター的 2次元正則局所環、 $G \subset \text{Aut}(A)$ をその自己同型群の有限部分群とし、 G の作用による A の不変環を $R = A^G$ と書く。

また簡単のため、本稿では A は完備であり、 G の A への作用は余次元 1 で自由であるとする。このとき $(X, x) = (\text{Spec } R, \mathfrak{m})$ を商特異点と呼ぶことにする。

定義 2.1. 上の記号の下で有限群 G の位数が標数で割り切れる場合に作用が野生的 (wild) であるといい、 $(\text{Spec } R, \mathfrak{m})$ を野生的商特異点 (*wild quotient singularity*) と呼ぶ。また、そうでない場合の作用を順的 (tame) 作用といい、 $(\text{Spec } R, \mathfrak{m})$ を順的商特異点 (*tame quotient singularity*) (または単に商特異点) と呼ぶ。

はじめに標数が 0 の商特異点の場合に知られていることを復習しておこう。尚、正標数であっても作用が順的であれば同様のことが成立する。

事実 2.2 (Cartan [4]). 標数が 0 であれば G の作用は線形化可能である

従って小さい (small) 有限部分群 $G \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$ を用いて $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$ としてよい。

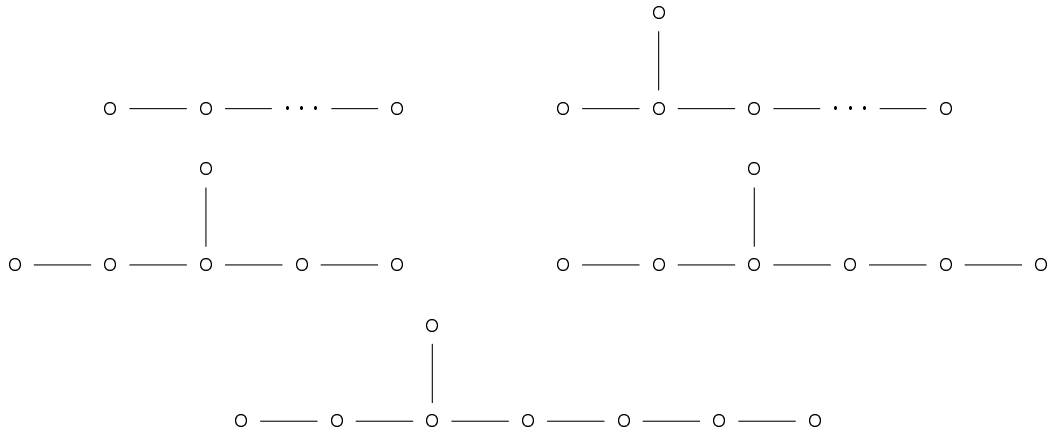
注意 2.3. 本稿では G の作用が余次元 1 で自由と仮定しているが、標数 0 では「アフィン空間の有限鏡映群による商はアフィン空間となる」という Chevalley の定理があるので、この仮定がなくても商特異点を考える上では鏡映を含まない小さい有限部分群として良い。しかしながら一般に正標数では状況が異なる。

次に Brieskorn による 2 次元複素商特異点の特徴付けについて述べる。

事実 2.4 (Brieskorn [3]). (X, x) が商特異点であることと以下はそれぞれ同値である。

- (1) 非特異な有限被覆 $(Y, y) \longrightarrow (X, x)$ が存在する。
- (2) 局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が有限である。

特に、 (X, x) が非特異であることと局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が自明であることは同値である。また、商特異点の双対グラフは以下のいずれかのグラフ (に適切な重みをつけたもの) であり、逆にそれぞれのグラフ (に適切な重みをつけたもの) に対して特異点が一意的に定まる。



適切な重みについては [3] を参照のこと。

更に、商特異点であって群が巡回群であるときは次のことがわかる。

事実 2.5. 商特異点について次は同値である。

- (1) 巡回商特異点である。
- (2) トーリック特異点である。
- (3) 例外集合が $\mathbb{P}^1$ の鎖に適切な重みを与えたものである。即ち、双対グラフは次の通りである。

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \cdots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ -b_1 & & -b_2 & & & & -b_{r-1} & & -b_r \end{array}$$

注意 2.6. 上の双対グラフの重みは連分数を用いて $\frac{n+1}{b} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \cdots - \frac{1}{b_r}}}$ と表される。ここで、 n と b は G の作用により次のように決まる数である。

$$G \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^b \end{pmatrix} \right\rangle$$

ただし、 ζ は 1 の原始 $n+1$ 乗根である。

定義 2.7. 双対グラフと重みが上述の (3) の形の特異点を $\frac{n+1}{b}$ 型 *Hirzebruch-Jung* 特異点と呼ぶ。

また、商特異点の中の重要なクラスとして標数 0 では有理二重点がある。

事実 2.8. 特異点 (X, x) が有理二重点であることと次のそれぞれは同値である。

- (1) *Gorenstein* 特異点かつ商特異点である。
- (2) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群 G により $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$ と表される。
- (3) $\mathbb{C}^3$ の超曲面であり定義方程式は下の表のいずれかである。

群	定義方程式	双対グラフ	基本群
μ_{n+1}	$z^2 + x^2 + y^{n+1}$ $\cong xy + z^{n+1}$	$A_n (n \geq 1)$	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
D_n	$z^2 + x^2y + y^{n-1}$	$D_n (n \geq 4)$	D_n
T	$z^2 + x^3 + y^4$	E_6	T
O	$z^2 + x^3 + xy^3$	E_7	O
I	$z^2 + x^3 + y^5$	E_8	I

ここで μ_{n+1} は位数 $n+1$ の巡回群を、 D_n は位数 $4n$ の 2 項正 2 面体群を、 T (O , I) は位数 24 (48, 120) の 2 項正 4 (8, 20) 面体群をそれぞれ表す。

- (4) 双対グラフは A, D, E 型 *Dynkin* 図形である。

より詳しくは Durfee [6] 等を参照のこと。

注意 2.9. $\mathbb{C}$ 上では、商特異点是对数的端末特異点であり、従って有理特異点である。また 2 次元であれば対数的特異点は商特異点でもある。しかしながら、正標数では必ずしも商特異点是有理特異点とはならず、いくらでも大きな種数の商特異点が構成可能である。

また、正標数では、有理二重点であっても一般に必ずしもここで言う商特異点ではない (§5 参照)。

3. 野生的商特異点

標数が 0 の場合の性質を前節で復習したが、それらに応じた正標数、特に野生的商特異点の場合に対応する事実を順に見ていく。

命題 3.1. 野生的商特異点は一般に線形化不可能である。

Proof. 簡単のため位数 p の有限群 G が 2 変数形式冪級数環に作用する場合を考える。作用が線形であると仮定し G の生成元 σ をとる。必要なら適当な変数変換を施すことにより、 σ の作用は次の Jordan 標準形の形であることができる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a \text{ と } c \text{ は } \sigma \text{ の固有値}$$

このとき $\sigma^p = 1$ より $a^p = c^p = 1$ となるが、標数が p なので $a = c = 1$ 、即ち σ の作用は $X \mapsto X + bY, Y \mapsto Y$ となる。 $b \neq 0$ とすると σ の固定軌跡が $\{Y = 0\} = X$ 軸 となり、原点のみが固定点である仮定に反する。従って $b = 0$ より $\sigma = 1$ となってしまう。 $\square$

このことから、作用を具体的に書き下すと 2 次以上の項が現れ、標数 0 のように作用が “有限” 種類となるようなことも、特異点の定義方程式の標準形を決めることも一般には期待できそうにない。しかしながら、低標数では次のような結果が知られている。

事実 3.2 (Artin [1]). k を標数 2 の代数的閉体とし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が $k[[U, V]]$ へ余次元 1 で自由に作用しているとする。このとき、互いに素な非単元 $a, b \in k[[U, V]]$ が存在して不変環は

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + abZ + Xb^2 + Ya^2)$$

と書ける。

より詳しく言うと、 R を不変環とすると、 $k[[U, V]]$ にパラメータ系 X, Y が存在し、あるパラメータ系 $a, b \in k[[X, Y]]$ を用いて $R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + abZ + Xb^2 + Ya^2)$ と表される。このとき環拡大 $R \subset k[[U, V]]$ は

$$U^2 + aU + X = 0, V^2 + bV + Y = 0$$

で表され、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元 σ の作用は $U \mapsto U + a, V \mapsto V + b$ と書ける。またこのとき、

$$X = U^2 + aU = U\bar{U}, Y = V^2 + bV = V\bar{V}, Z = U\bar{V} + \bar{U}V = Ub + Va$$

である。ただし、 $\bar{U}, \bar{V}$ でそれぞれ U, V の共役を表す。

例 3.3. (1) $a = X, b = Y$ とすると

$$R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + XYZ + X^2Y + XY^2)$$

となり有理二重点 D_4^1 が得られる。(記号の説明は § 5 参照のこと。)

(2) $a = Y^2, b = X$ とすると

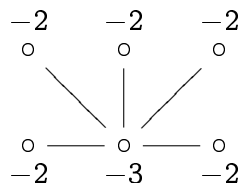
$$R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + XY^2Z + X^3 + Y^5)$$

となり有理二重点 E_8^2 が得られる。

(3) $a = X^2, b = Y^2$ とすると

$$R \cong k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^2Y^2Z + X^4Y + XY^4)$$

となり最小楕円型特異点 $\textcircled{19}_0$ が得られる。記号 $\textcircled{19}_0$ は Wagreich [22] による最小楕円型特異点の分類記号。また、 $\textcircled{19}_0$ の双対グラフは以下の通りである。



事実 3.4 (Peskin [18]). k を標数 3 の代数的閉体とし $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が $k[[U, V]]$ へ余次元 1 で自由に作用しているとする。また、作用の線形部分の *Jordan* ブロックがただ一つであるとする。(即ち、作用が適当な変数変換の後 $U \mapsto U + V + \mathcal{O}(2), V \mapsto V + \mathcal{O}(2)$ と書けるとする。) このとき、不変環は

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^3 + Y^{2j}Z^2 - Y^{3j+1} - X^2) \quad (j \geq 1)$$

に同型となる。

例 3.5. (1) $j = 1$ すると不変環は

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^3 + Y^2Z^2 - Y^4 - X^2)$$

となり有理二重点 E_6^1 となる。

(2) $j > 1$ ならば不変環は *Cohen-Macaulay* であるが非有理的特異点となる。

標数が 2 の場合 (Artin)、標数が 3 の場合 (Peskin) 何れの場合も非常に巧妙に証明をしているので、一般の標数において野生的巡回商の場合に限定しても標準形を得るのはかなり難しそうな感じである。

基本群との関係は準非分離被覆があるため標数 0 のように単純ではない。

事実 3.6. (X, x) を正標数の商特異点とする。このとき非特異代数曲面による有限被覆が存在する。即ち、

$$\exists(Y, y) \text{ 非特異} \longrightarrow (X, x) \text{ 有限射}$$

また、非特異代数曲面による有限被覆が存在するならば、局所基本群 $\pi_1^{\text{loc}}(X, x)$ が有限となる。更に、商特異点の双対グラフは木構造 (サイクルを含まない) となる。

注意 3.7. (1) 局所基本群が有限であるとき非特異代数曲面による有限被覆が存在するか否かについては、任意正標数の有理二重点 (Artin [2]), *Brieskorn* 型特異点 ($p > 2$, *Cutkosky-Srinivasan* [5]) の場合に肯定的に証明されている。

(2) 正標数では局所基本群が自明であっても非特異であるとは限らない。実際、非特異代数曲面による純非分離被覆がある場合に基本群が自明となるとなることがある。(§5 の有理二重点を参照のこと。)

巡回商特異点については順的な場合と野性的な場合で様相がちがうが、見方を変えて双対グラフが鎖となるもの、即ち *Hirzebruch-Jung* 特異点を対象と考えると次の事実が成り立つ。

事実 3.8. *Hirzebruch-Jung* 特異点であることトーリック特異点であることは同値である。

証明は例えば、原 [7]、Lee-中山 [14] を参照のこと。

これらが商特異点であるか否かについては、*Hirzebruch-Jung* 特異点の型を $\frac{m}{b}$ とするとき、 m と標数が互いに素であれば $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ による順的商特異点となるが、 m が標数で割れる場合は導分による商 (=乗法型群スキームによる商) になると考えられる。実際、 $m = p$ の場合は群スキーム μ_p による商として記述される (廣門 [9] 参照)。

4. 野生的商特異点の双対グラフ

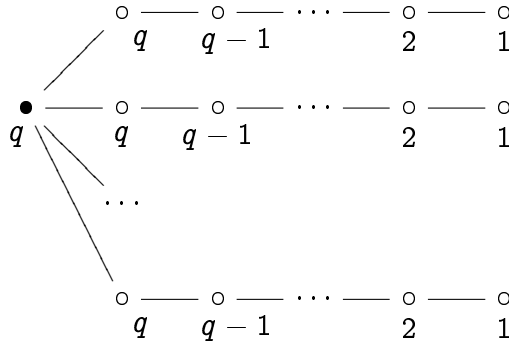
野生的商特異点の双対グラフについて考察する。標数が 0 の商特異点については既に § 2 でみたように双対グラフはノードの数が高々 1 つである木構造であり、巡回商特異点であることと鎖 (ノードを持たない木構造) であることが必要十分であることがわかっている。しかしながら正標数の場合は状況が異なる。

事実 4.1. 野生的商特異点の双対グラフについて以下が成り立つ。

- (1) 順的巡回商特異点の双対グラフは鎖である。
- (2) (Lorenzini [15]) 野生的商特異点の双対グラフは有理曲線による木構造 (サイクルを含まない) である。
- (3) (Lorenzini [15]) 野生的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 商特異点の交叉行列の行列式は p べきである。

次に野生的商特異点の双対グラフについてこれまで得られている少ない例をあげる。

- 例 4.2. (1) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商 (例 3.3) として D_4 型特異点、 E_8 型特異点、 $\textcircled{19}_0$ 型特異点を得られ、いずれも 1 つのノードを持つ。
- (2) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 商 (例 3.5) として得られる E_6 型特異点のノード数は 1 である。
- (3) 標数 2 の Kummer 曲面 (塩田 [20], 桂 [13]) に現れる特異点として D_4 型、 D_8 型、 $\textcircled{19}_0$ 型、 $\textcircled{4}_{0,1}^1$ 型の各特異点についていずれも 1 のノードを持つ。(記号は Wagreich [22] によるもの。)
- (4) $\mathbb{F}_q$ 上の Artin-Schreier 曲線の自己積への $\mathbb{F}_q$ の対角作用による商として現れる特異点 (伊藤-Schröer [11]) で、双対グラフは以下の図の通り星形グラフ (ノード数は 1) となる。また、基本種数は $p_f = \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ であり q とともに増大する。



ここで $\bullet$ からでている枝の数は $q+1$ で、数字は因子としての重複度を表し、重みは $\circ$ が全て -2 で、 $\bullet$ は $-q$ である。

上の例の (4) 以外はいずれも種数の小さい特異点であったが、(4) の例によりいくらでも種数が大きな特異点が野生的商特異点として得られることがわかる。以下にこの特異点の構成法を述べる。詳しくは伊藤-Schröer [12] を参照のこと。

C として標数 p のある種の Artin-Schreier 曲線を考える。

$$C : y^{q-1} = x^q - x$$

これは、 $q = 3$ とすると標数が 3 の時に唯一存在する超特異楕円曲線となる。また、この曲線の自己同型群の有限 p 部分群とその作用として

$$(\mathbb{F}_q, +) \ni a, \quad x \mapsto x + a, y \mapsto y$$

を考える。これは p 基本的 (p -elementary) である。尚、上の作用は標数 3 の超特異楕円曲線への自己同型群 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 内の位数 3 の元の作用を一般化したものである。

この作用を $C \times C$ へ対角的に作用させその商を考えると欲しい特異点

$$k[[X, Y, Z]]/(Z^q - X^{q-1}Y^{q-1}Z - X^qY + XY^q)$$

が得られる。尚、この特異点は 1 点ブローアップすると $q + 1$ 個の有理二重点 A_q が例外曲線 $\mathbb{P}^1$ の $q + 1$ 個の $\mathbb{F}_q$ 有理点上にのっている。

さて、上で見たように正標数の商特異点については、双対グラフが鎖であるかノードを持つ木構造であるかによりその性質が異なるようである。実際、 $\frac{m}{b}$ 型 Hirzebruch-Jung 特異点について標数 p が m を割り切らない場合は順的巡回特異点であり、標数 p に等しい場合は本稿で用いている有限群による商特異点ではなく、群スキーム μ_p による商特異点である。また、 m が標数 p のべき p^e の場合は、群スキーム μ_{p^e} による商特異点 (高次導分による商) であると予想され、一般の場合はこれらの合成と考えられる。(現在検証中)

Hirzebruch-Jung 特異点の局所基本群に関しては次の結果が得られている。

定理 4.3 (伊藤-Schröer [12]). $\frac{m}{b}$ 型の Hirzebruch-Jung 特異点の局所基本群は、位数 m の巡回群の p と互いに粗な部分 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})'$ に同型である。

証明は Log 幾何学を用いるが論文 [12] を参照のこと。尚、論文ではより一般に混標数の場合も含めて証明している。

系 4.4. 野生的商特異点の双対グラフは 1 つ以上のノードを持つ。

特に、標数 0 では商特異点の双対グラフのノードの数は 0 または 1 出会ったことを思い出すと正標数との違いがよくわかる。

このことから双対グラフとしてノードの数が 2 以上のものが現れるか否かが問題となるが、結果は次の通りである。

定理 4.5 (伊藤-Schröer [12]). 任意の正標数において双対グラフのノードの数が少なくとも 2 である野生的商特異点が存在する。

この定理の証明は具体的に商特異点を構成するのであるが、その定義方程式を書き下すのがうまくいかないので間接的にノード数を下から評価する。尚、詳細は [12] を参照のこと。

次の $\mathbb{F}_q$ 上の Hermit 曲線と言われる曲線を考える。

$$C : y^q - y = x^{q+1}$$

これは自己同型群が例外的に大きい曲線として知られ、Fermat 曲線

$$X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1} = 0$$

に $\mathbb{F}_{q^2}$ 上同型¹である。この曲線の自己同型群は

$$\text{Aut}(C) \cong \begin{cases} \text{PU}(3, q) & q > 2 \\ Q \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & q = 2 \end{cases}$$

であり、その位数は

$$|\text{Aut}(C)| = \begin{cases} q^3(q^3 + 1)(q^2 - 1) & q > 2 \\ 24 & q = 2 \end{cases}$$

となる。

今、 G として $\text{Aut}(C)$ の Sylow p 部分群をとると $|G| = q^3$ となる。このとき群 G は特別な部分群 (special subgroup) となる。即ち Frattini 部分群と中心と交換子群がすべて一致 ($\cong (\mathbb{F}_p, +)$) する。また、 G の C への作用は

$$G = \{(t, r) \in k^2 \mid r^{q^2} + r = 0 \text{ and } t^q - t = r^{q+1}\}$$

とするとき

$$X \mapsto X + r, Y \mapsto Y - r^q X + t$$

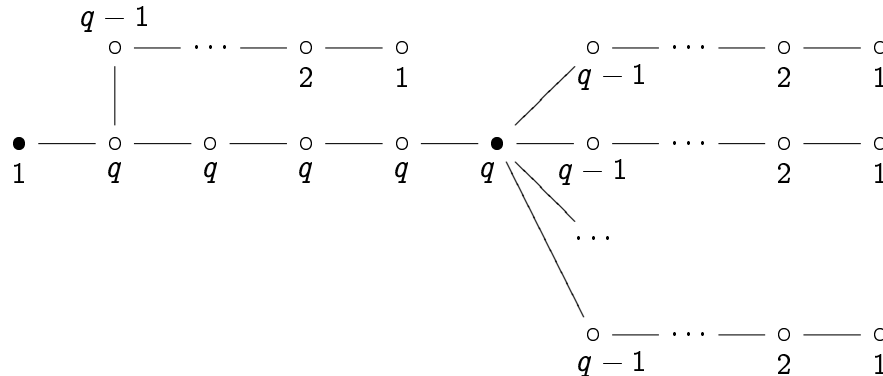
で与えられる。ただし、この作用は可換ではないことに注意する。

この作用を自己積 $C \times C$ に対して対角作用させ、その商 $C \times C/G$ を考えるのであるが、ここに現れる特異点を直接計算するのは困難なので自然に誘導される $\mathbb{P}^1$ 上のファイブレーション

$$C \times C/G \longrightarrow C/G \cong \mathbb{P}^1$$

の相対極小モデルの特異ファイバーを求める。相対極小モデルは $C \times C/G$ の最小特異点解消から (-1) 曲線を blow down して得られるので、この特異ファイバーの形かわかれば特異点の双対グラフのノード数の下限がわかることになる。

計算すると相対極小モデル $S \longrightarrow C/G \cong \mathbb{P}^1$ について、一般ファイバーの種数は $\frac{q(q-1)}{2}$ であり、生成ファイバーの方程式は $y^q - y = x^{q+1} + \tau x^q$ 、唯一の特異ファイバー ($\tau = \infty$ 上) の双対グラフは次の通りであることがわかる。



¹この事実とその自己同型群が $\text{PU}(3, q)$ となることについて講演後、塩田先生に論文 [21] とともにご教示いただきました。

ここで、右の●から出ている枝は q 本で、数字は因子としての重複度を表し、重みは○がすべて -2 、●はすべて $-q$ である。

従って商特異点の双対グラフのノード数は少なくとも 2 であることがわかる。

5. もう一つの野生的 “商” 特異点

講演においても少し触れたが、本講演での主対象である野生的商特異点の他に、正標数ではもう一つの “商” 特異点である導分による商特異点がある。これらの関係について有理二重点を題材として簡単に述べる。

複素数体上の有理二重点は §2 で述べたように、双対グラフが ADE 型 Dynkin 図形に 1 対 1 対応し、それぞれに $SL(2, \mathbb{C})$ の小さい有限部分群がただ一つ対応した商特異点となっている。特に、このように双対グラフから特異点 (の局所同型類) が決まるこのような特異点を taut 特異点と言う。しかしながら、正標数では 1975 年に Artin [1] により、同じ Dynkin 図形を双対グラフに持つ異なる (局所同型でない) 有理二重点、即ち taut 特異点ではない有理二重点が存在することが分類によりわかった。

以下での議論のため Artin [1] による分類表 (Table 1、Table 2) を書いておく。

TABLE 1. 標数 $p > 2$ の有理二重点

双対グラフ	定義方程式	Tjurina 数	基本群
$A_n (n \geq 1)$	$z^2 + x^2 + y^{k+1}$	$n (p \nmid n+1)$ $n+1 (p \mid n+1)$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})'$
$D_n (n \geq 4)$	$z^2 + x^2y + y^{k-1}$	n	D_n
E_6	$E_6^0: z^2 + x^3 + y^4$	$6 (p \neq 3), 9 (p = 3)$	$T, 0$
$\exists \text{ in } p = 3$	$E_6^1: z^2 + x^3 + y^4 + x^2y^2$	7	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
E_7	$E_7^0: z^2 + x^3 + xy^3$	$7 (p \neq 3), 9 (p = 3)$	$O, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\exists \text{ in } p = 3$	$E_7^1: z^2 + x^3 + xy^3 + x^2y^2$	7	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_8	$E_8^0: z^2 + x^3 + y^5$	$8 (p \neq 3, 5)$ $10 (p = 5)$ $12 (p = 3)$	I 0 0
$\exists \text{ in } p = 3$	$E_8^1: z^2 + x^3 + y^5 + x^2y^3$	10	0
$\exists \text{ in } p = 3$	$E_8^2: z^2 + x^3 + y^5 + x^2y^2$	8	$Q \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\exists \text{ in } p = 5$	$E_8^1: z^2 + x^3 + y^5 + xy^4$	8	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

表より、例えば標数が 2 の D_4 型特異点は D_4^0 と D_4^1 の非同型な 2 種類の特異点があることがわかる。定義方程式が与えられており Tjurina 数を計算するとそれぞれ $\tau(D_4^0) = 8, \tau(D_4^1) = 6$ であることからこれらが非同型であることがわかる。また、例 3.3 で見たように D_4^1 は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による野生的商特異点であるが、 D_4^0 は局所基本群が自明であることから本稿で論じているような有限群の商にはなり得ない。では D_4^0 はどのように作られているかと

TABLE 2. 標数 $p = 2$ の有理二重点

双対グラフ	定義方程式	Tjurina 数	基本群
$A_n (n \geq 1)$	$z^{n+1} + xy$	n (n even) $n + 1$ (n odd)	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})'$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
D_{2m} ($m \geq 2$)	$D_{2m}^0 \quad z^2 + x^2y + xy^m$ $D_{2m}^r \quad z^2 + x^2y + xy^m + xy^{m-r}z$	$4m$ $4m - 2r$	0 $D_{2(2r-n)'}'$
D_{2m+1} ($m \geq 2$)	$D_{2m+1}^0 \quad z^2 + x^2y + y^mz$ $D_{2m+1}^r \quad z^2 + x^2y + y^mz + xy^{m-r}z$	$4m$ $4m - 2r$	0 $D_{2(4r-2n+1)}$
E_6	$E_6^0 \quad z^2 + x^3 + y^2z$ $E_6^1 \quad z^2 + x^3 + y^2z + xyz$	8 6	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_7	$E_7^0 \quad z^2 + x^3 + xy^3$ $E_7^1 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + x^2yz$ $E_7^2 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + y^3z$ $E_7^3 \quad z^2 + x^3 + xy^3 + xyz$	14 12 10 8	0 0 0 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
E_8	$E_8^0 \quad z^2 + x^3 + y^5$ $E_8^1 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xy^3z$ $E_8^2 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xy^2z$ $E_8^3 \quad z^2 + x^3 + y^5 + y^3z$ $E_8^4 \quad z^2 + x^3 + y^5 + xyz$	16 14 12 10 8	0 0 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 0 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

言う、群スキーム α_2 による商、より詳しく言うと導分 $D = X^2 \frac{\partial}{\partial X} + Y^2 \frac{\partial}{\partial Y}$ による商となっている。(導分による商については Rudakov-Shafarevich [19] 等を参照のこと。)

同様のことは標数が 3 の E_6^0 (α_3 商) と E_6^1 (例 3.5) や、標数が 2 の E_8^0 (α_2 商) と E_8^2 (例 3.3) についても言える。

しかし、表を見るとこのような商だけでは説明が見つからないものがたくさんあるように見える。例えば標数 2 の E_8 型特異点は 5 つがあるが、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 商の E_8^2 、 α_2 商の E_8^0 の他がどのような「商」により得られているのか(得られていないのか)がよくわかっていない。可能性としては、余次元 1 で自由ではない作用による商やそれと導分による商、順的作用による商の組み合わせなどが考えられる。勿論 Artin [2] では非特異な被覆が全ての有理二重点について具体的に構成されているので個別に計算することにより説明をつけることは可能と思われるが、数学的な理由がよくわかっていない。

このように一つの双対グラフに対して、導分による商として得られる特異点と野生的商として得られる特異点に対応する例は有理二重点以外にも作ることができる。

例 5.1. 例 3.3 で扱った最小楕円型特異点 $\textcircled{19}_0$ には標数が 2 において非同型な次の 2 つの特異点が存在する。

(1) 導分 $D = X^2 \frac{\partial}{\partial X} + Y^2 \frac{\partial}{\partial Y}$ による商としての $\textcircled{19}_0$ で定義方程式は

$$Z^2 + X^4Y + XY^4 = 0$$

で与えられるもの。

(2) 例 3.3 で与えられた野生的商特異点として

$$Z^2 + X^2Y^2Z + X^4Y + XY^4 = 0$$

を定義方程式とするもの。

例 5.2. 例 4.2 (4) で扱った一般標数 p での星形グラフを持つ特異点についても非同型な次の 2 つの特異点が存在する。

(1) 導分 $D = X^q \frac{\partial}{\partial X} + Y^q \frac{\partial}{\partial Y}$ による商として特異点で定義方程式は

$$Z^q - X^qY + XY^q = 0$$

で与えられるもの。

(2) 例 4.2 で与えられた野生的商特異点として

$$Z^q - X^{q-1}Y^{q-1}Z - X^qY + XY^q$$

を定義方程式とするもの。

何れの例も (1) にあたる純非分離型の特異点は Frobenius サンドイッチ特異点である。詳しくは 原-澤田 [8] を参照のこと。このように純非分離型特異点 (例えば Frobenius サンドイッチ特異点) があると、それを “変形” させることにより、より Tjurina 数の小さな特異点で同じ双対グラフを持つものが構成可能であることが推察される。

一方で、本稿で扱った Artin-Schreier 商で得られるような「分離型特異点」についても、純非分離型特異点に対する Frobenius 写像によるサンドイッチ構造と類似の扱いをすることが可能である。

これらのことや、両者を (導分と群作用を) 「つなぐ」ことが可能そうなこと、また、正標数の有理二重点の「更なる不思議」については別の機会に論ずることにする。

最後に本稿を

問題 1. これら導分の商 (群スキームの商) により得られる「純非分離型特異点」と野生的商として得られる「分離型特異点」を「変形」の立場から、作用を込めて統一的に扱えという問いで締めくくりたい。

REFERENCES

- [1] M. Artin : Wildly ramified $\mathbb{Z}/2$ actions in dimension two. Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), pp.60–64.
- [2] Coverings of the rational double points in characteristic p , In: W. Baily, T. Shioda (eds.), Complex analysis and algebraic geometry, pp.11–22. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.
- [3] E. Brieskorn : Rationale Singularitäten Komplexer Flächen, Invent. Math. **4** (1968), pp.336–358.
- [4] E. Cartan, Automorphism
- [5] D. Cutkosky, H. Srinivasan : The algebraic fundamental group of a curve singularity, J. Algebra **230** (2000), pp.101–126.

- [6] A. Durfee : Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, *L'Enseignement* **XXV** 1-2 (1979), pp.131–163.
- [7] N. Hara : F-blowups of F-regular surface singularities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140** (2012), pp.2215–2226.
- [8] N. Hara, T. Sawada : Splitting of Frobenius sandwiches, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B24** (2011), pp.121–141.
- [9] M. Hirokado : Singularities of multiplicative p-closed vector fields and global 1-forms of Zariski surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **39** (1999), pp.455–468.
- [10] 石井志保子 : 特異点入門、シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997.
- [11] H. Ito, S. Schröer : Wildly Ramified Actions and Surfaces of General Type Arising from Artin-Schreier Curves, In: C. Faber, G. Farkas, R. de Jong (eds), *Arithmetic and Geometry in honor of Gerard van der Geer*, pp.213–241, *European Math. Soc.*, 2012.
- [12] H. Ito, S. Schröer : Wild quotient surface singularities whose dual graphs are not star-shaped, preprint, arXiv:1209.3605.
- [13] T. Katsura : On Kummer surfaces in characteristic 2, In: M. Nagata (ed), *Proceedings the international symposium on algebraic geometry*, pp.525–542, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.
- [14] Y. Lee, N. Nakayama : Simply connected surfaces of general type in positive characteristic via deformation theory, to appear in *Proc. London Math. Soc.*
- [15] D. Lorenzini : Wild quotient singularities of surfaces, preprint, <http://www.math.uga.edu/~lorenz/paper.html>
- [16] D. Lorenzini : Quotients on wild $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -quotient singularities in dimension 2, preprint, <http://www.math.uga.edu/~lorenz/paper.html>
- [17] D. Lorenzini : Wild quotients of products of curves, preprint, <http://www.math.uga.edu/~lorenz/paper.html>
- [18] B. Peskin : Quotient-Singularities and Wild p -Cyclic Actions, *J. of Algebra* **81** (1983), pp.72–99.
- [19] A. N. Rudakov, I. R. Shafarevich : Inseparable morphisms of algebraic surfaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **40** (1976), no. 6, pp.1269–1307 (Russian); English transl., *Math. USSR-Izv.* **40** (1976), no. 6, pp.1205–1237.
- [20] T. Shioda : Kummer surfaces in characteristic 2, *Proc. Japan Acad.* **50** (1974), 718–722.
- [21] T. Shioda : Arithmetic and Geometry of Fermat Curves, In: *Proceedings of the Algebraic Geometry Seminar Singapore*, pp.95–102, World Scientific, 1987.
- [22] P. Wagreich : Elliptic Singularities of Surfaces, *Amer. J. Math.* **92** (1970), pp.419–454.

〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, 東京理科大学理工学部数学科

E-mail address: ito_hiroyuki@ma.noda.tus.ac.jp