正標数有理二重点は商特異点か?

伊藤 浩行

1. 序

特異点の中で最も簡単な対象は有理二重点である。複素数体上では有理二重点はよく知られている通り商特異点で有り、McKay 対応などの現象もあり、単純ではあるが大変興味深い対象である。では正標数ではどうだろうか? 複素数体上でよく知られていることも、実は基礎体の標数が正になったとたんに非常に難しい問題になることがしばしばある。一つの原因として、関係する有限群の位数が標数で割れる場合に、さまざまなことが成り立たなくなってしまう、もしくは、成り立つと予想されるが証明が困難であることがあげられる。

正標数有理二重点は商特異点であるか否か。実は M. Artin による正標数の有理二重点の論文がでてから 40 年近くたつが、白黒はっきり決着がついていないと思われ、それが解決しなければ McKay 対応等更なる興味深い考察もできない。

Artin による正標数有理二重点の分類表が書かれた論文 [2] は、計算や証明が書かれておらず、表を見ているだけでも疑問がつきないものである。多くの計算を具体的に実行し、その行間や背後にある一般論を垣間見ると、有理二重点という最も単純な特異点を詳しく調べることは多くの一般的理論を引き出すきっかけになるだろうことが感じられる。

今回は、「正標数であっても有理二重点は何らかの意味で商特異点に違いない」という思いから「正標数有理二重点は群スキームによる商特異点である」という「定理」を背後にある数学的な背景説明付きで証明しようと考え、あわよくば完全な解答を講演で述べようと考えた次第である。しかしながら、やってみると意外に奥が深く、完全な解答を出せずに講演を行ったことは心残りである。本原稿を各段階でも、まだ不明な部分があり解答からは遠いが現状の報告とさせて頂く。(詳細は伊藤 [12] を参照のこと。) *

本稿では k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし、2 次元正規特異点とは Noether 的正規完備局所 k 代数 R、即ち $R \cong k[[X_1, \ldots, X_r]]/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ はイデアル) を用いて $\operatorname{Spec} R$ と表される局所スキームとし、本稿では、特異点は 2 次元正規特異点のみを考える。また、Artin による代数化定理があるので、話をわかりやすくするために完備化をする前と後を特に区別無く (気にせず) 使うこととする。

2 次元正規特異点には商特異点と呼ばれる重要なクラスがあるが、本稿では商特異点を当面 以下の通りとする。

定義 1.1. $(X, x) = (\operatorname{Spec} R, \mathfrak{m}_R)$ が**商特異点**であるとは、R が *2* 次元 *Noether* 的完備正則局所環 A の自己同形群 $\operatorname{Aut}(A)$ の有限部分群 G による不変式環 $R = A^G$ となるときを言う。ただし、G の A への作用は余次元 1 で自由であるとする。

文部科学省 科学研究費 基盤研究 (C) 24540051 の援助を受けております。.

*高知での講演の際は、桂利行氏、川ノ上帆氏から有益な助言を頂きました。この場を借りてお礼申し上げます。

定義 1.2. 上の記号の下で有限群 G の位数が標数で割り切れる場合に作用が**野生的** (wild) であるといい、$(\operatorname{Spec} R, \mathfrak{m})$ を**野生的商特異点** (***wild quotient singularity***) と呼ぶ。また、そうでない場合の作用を**順的** (tame) 作用といい、$(\operatorname{Spec} R, \mathfrak{m})$ を**順的商特異点** (tame quotient singularity) (または単に商特異点) と呼ぶ。

2. 複素数体上の商特異点と有理二重点

正標数の代数閉体上の場合を考える前に、よく知られた複素数体上の場合について簡単に復習する。商特異点について以下は周知の事実である。

事実 2.1 (Cartan [4]). 標数が 0 であれば G の作用は線形化可能である

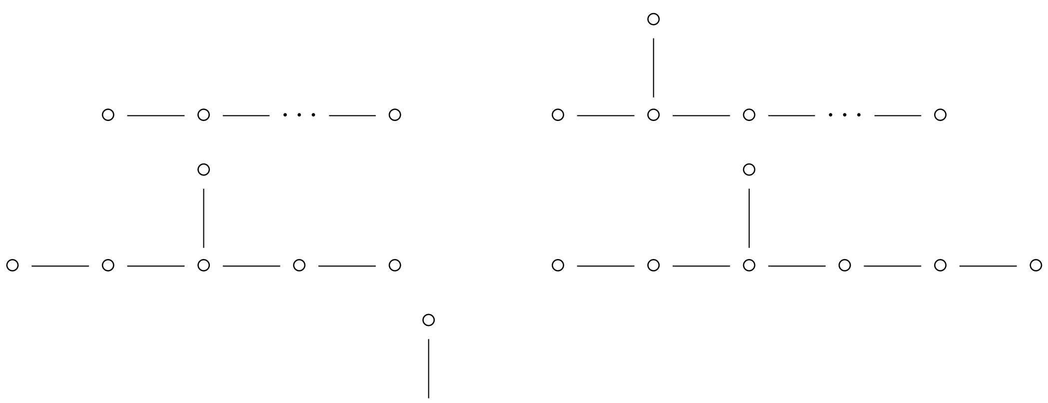
従って小さい (small) 有限部分群 $G \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ を用いて $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$ としてよい。

事実 2.2. $\mathbb{C}$ 上では、商特異点は対数的端末特異点であり、従って有理特異点である。また 2 次元であれば対数的特異点は商特異点でもある。

事実 2.3 (Brieskorn [3]). (X, x) が商特異点であることと以下はそれぞれ同値である。

(i) 非特異な有限被覆 $(Y, y) \to (X, x)$ が存在する。
(ii) 局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が有限である。

特に、(X, x) が非特異であることと局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が自明であることは同値である。また、商特異点の双対グラフは以下のいずれかのグラフ (に適切な重みをつけたもの) であり、逆にそれぞれのグラフ (に適切な重みをつけたもの) に対して特異点が一意的に定まる。(適切な重みについては [3] を参照のこと。)



更に、商特異点であって群が巡回群であるときは次のことがわかる。

事実 2.4. 商特異点について次は同値である。

(i) 巡回商特異点である。
(ii) トーリック特異点である。
(iii) 例外集合が $\mathbb{P}^1$ の鎖に適切な重みを与えたものである。即ち、双対グラフは次の通りである。

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{——} & \circ & \text{——} \cdots \text{——} & \circ & \text{——} & \circ \\ -b_1 & & -b_2 & & -b_{r-1} & & -b_r \end{array}$$

注意 2.5. 上の双対グラフの重みは連分数を用いて $\dfrac{n+1}{b} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \cdots - \cfrac{1}{b_r}}}$ と表される。ここで、n と b は G の作用により次のように決まる数である。

$$G \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z} = \langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^b \end{pmatrix} \rangle$$

ただし、ζ は 1 の原始 $n+1$ 乗根である。

定義 2.6. 双対グラフと重みが上述の (3) の形の特異点を $\frac{n+1}{b}$ **型 *Hirzebruch-Jung* 特異点**と呼ぶ。

有理二重点に関して次はよく知られた事実である。より詳しくは Durfee [7] 等を参照のこと。

事実 2.7. 特異点 (X, x) が有理二重点であることと次のそれぞれは同値である。

(i) *Gorenstein* 特異点かつ商特異点である。
(ii) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群 G により $(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/G, 0)$ と表される。
(iii) $\mathbb{C}^3$ の超曲面であり定義方程式は下の表のいずれかである。

群	定義方程式	双対グラフ	基本群
μ_{n+1}	$z^2+x^2+y^{n+1} \cong xy+z^{n+1}$	$A_n (n \geq 1)$	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
D_n	$z^2+x^2y+y^{n-1}$	$D_n (n \geq 4)$	BD_{n-2}
T	$z^2+x^3+y^4$	E_6	BT
O	$z^2+x^3+xy^3$	E_7	BO
I	$z^2+x^3+y^5$	E_8	BI

ここで μ_{n+1} は位数 $n+1$ の巡回群を、BD_{n-2} は位数 $4(n-2)$ の 2 項正 2 面体群を、BT (BO, BI) は位数 24 (48, 120) の 2 項正 4 (8, 20) 面体群をそれぞれ表す。
(iv) 双対グラフは A, D, E 型 *Dynkin* 図形である。

系 2.8. 有理二重点は *taut* 特異点である。即ち、特異点は双対グラフにより同型を除いて一意的に決まる。*taut* 特異点については *Laufer* [15] を参照のこと。

3. 正標数の場合 –商特異点と有理二重点–

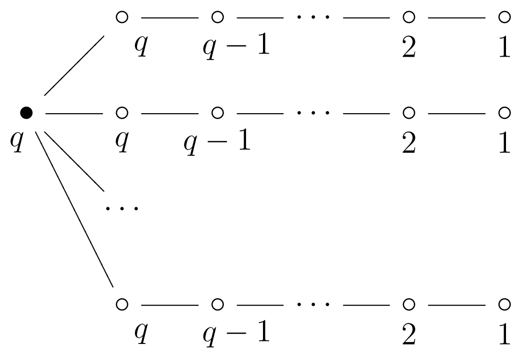
正標数代数的閉体上の場合を考察する。商特異点に関しては、正標数であっても作用が順的であれば、標数 0 と同様のことが成立するが、野生的商特異点に関しては様相を異にする。特に、野生的作用は一般に線形化不可能であることが話をややこしくしている。以下、前節で復習した複素数体上の場合の各事実について、野生的商特異点の場合に対応する事実を順に見ていく。

命題 3.1. 野生的商特異点は一般に線形化不可能である。

事実 3.2. 商特異点ならば有理特異点とは限らない。

次の例のようにいくらでも大きな種数の商特異点が構成可能である。

例 3.3. $\mathbb{F}_q$ 上の *Artin-Schreier* 曲線 $(y^{q-1} = x^q - x)$ の自己積への $(\mathbb{F}_q, +)$ の対角作用による商として現れる特異点 (伊藤-Schröer [13]) で、双対グラフは以下の図の通り星形グラフ (ノード数は 1) となる。また、基本種数は $p_f = \frac{(q-1)(q-2)}{2}$ であり q とともに増大する。



ここで $\bullet$ からでている枝の数は $q+1$ で、数字は因子としての重複度を表し、重みは $\circ$ が全て -2 で、$\bullet$ は $-q$ である。

基本群との関係は準非分離被覆があるため標数 0 のように単純ではないが、次の事実が知られている。

事実 3.4. (X, x) を正標数の商特異点とする。このとき非特異代数曲面による有限被覆が存在する。即ち、

$$\exists (Y, y) \text{ 非特異} \to (X, x) \text{ 有限射}$$

また、非特異代数曲面による有限被覆が存在するならば、局所基本群 $\pi_1^{loc}(X, x)$ が有限となる。更に、商特異点の双対グラフは木構造 (サイクルを含まない) となる。

注意 3.5. (i) 局所基本群が有限であるとき非特異代数曲面による有限被覆が存在するか否かについては、任意正標数の有理二重点 (*Artin* [2]), *Brieskorn* 型特異点 ($p > 2$, *Cutkosky-Srinivasan* [5]) の場合に肯定的に証明されている。

(ii) 正標数では局所基本群が自明であっても非特異であるとは限らない。実際、非特異代数曲面による純非分離被覆がある場合に基本群が自明となるとなることがある。

巡回商特異点については順的な場合と野性的な場合で様相がちがうが、見方を変えて双対グラフが鎖となるもの、即ち Hirzebruch-Jung 特異点を対象と考えると次の事実が成り立つ。

事実 3.6. *Hirzebruch-Jung* 特異点であることトーリック特異点であることは同値である。

証明は例えば、原 [8]、Lee-中山 [16] を参照のこと。

これらが商特異点であるか否かについては、Hirzebruch-Jung 特異点の型を $\frac{m}{b}$ とするとき、m と標数が互いに素であれば有限巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ による順的商特異点となるが、m

が標数で割れる場合は乗法的導分による商 (=乗法型群スキーム μ_m による商) になる。(廣門 [10]、石橋-小野田 [11] 参照)。

さて、有理二重点についてはどうであろうか。まず任意標数での有理二重点の分類表を書いておく。(E_8 型は Lipman [17] が最初で、全ての場合は Artin [1] によって与えられた。) ただし、ここで群 D_n は位数 $2n$ の 2 面体群を表し、$(n)'$ で 2 と素な n の最大因子を表す。

TABLE 1. 標数 $p>2$ の有理二重点

双対グラフ	定義方程式	Tjurina 数	基本群
$A_n(n\geq 1)$	$z^2+x^2+y^{k+1}$	n $(p\nmid n+1)$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
		$n+1$ $(p\mid n+1)$	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})'$
$D_n(n\geq 4)$	$z^2+x^2y+y^{k-1}$	n	BD_{n-2}
E_6	E_6^0 $z^2+x^3+y^4$	6 $(p\neq 3)$, 9 $(p=3)$	BT, 0
$\exists$ in $p=3$	E_6^1 $z^2+x^3+y^4+x^2y^2$	7	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
E_7	E_7^0 $z^2+x^3+xy^3$	7 $(p\neq 3)$, 9 $(p=3)$	O, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\exists$ in $p=3$	E_7^1 $z^2+x^3+xy^3+x^2y^2$	7	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_8	E_8^0 $z^2+x^3+y^5$	8 $(p\neq 3,5)$	BI
		10 $(p=5)$	0
		12 $(p=3)$	0
$\exists$ in $p=3$	E_8^1 $z^2+x^3+y^5+x^2y^3$	10	0
$\exists$ in $p=3$	E_8^2 $z^2+x^3+y^5+x^2y^2$	8	$Q\rtimes\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\exists$ in $p=5$	E_8^1 $z^2+x^3+y^5+xy^4$	8	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

表より、A_n 型 (ただし標数 p が $n+1$ を割り切らない場合)、任意標数の D_n 型、標数が 5 以上の E_6 型と E_7 型、標数が 7 以上の E_8 型は順的作用による商特異点となり、taut 特異点であることが分かる。

また、既に述べたように標数 p が $n+1$ を割り切る場合の A_n 型は導分による商、即ち有限群スキーム μ_{m+1} による「商特異点」となる。一方、標数が 2 の場合の D_n^r 型 $(r\neq 0)$、E_6^1、E_7^3、E_8^2、E_8^4、標数が 3 の場合の E_6^1、E_7^1、E_8^2、標数が 5 の場合の E_8^1 は、いずれも有限群による野生的商特異点であるが、具体的な作用が全ての場合に書き下すことが出来ているわけではない。これら野生的商特異点の具体的な作用と、残る標数が 2 の場合の D_n^0 型、E_6^0、E_7^r $(r=0,1,2)$、E_8^r $(r=0,1,3)$、標数が 3 の場合の E_6^0、E_7^0、E_8^0、E_8^1、標数が 5 の場合の E_8^0 を理解するために、少し準備を行う。

まず、既に A_n 型特異点により分かっているが、有限群商だけを考えていたのでは局所基本群に現れない被覆が捉えられないので、有限群を定数群スキームと考え、商特異点の定義を有限群スキームによる商と定義し直す。

以下では、特に標数 p 特有の、長さ p の有限平坦群スキームの一つである加法群 α_p による商のみを考察するので、その場合に限って話をすることとする。

3.1. α_p **作用による商特異点.** まず、標数 p 特有の、長さ p の有限平坦群スキームの一つである加法群 α_p について復習する。詳細については Demzaure-Gabriel [6] を参照のこと。

TABLE 2. 標数 $p=2$ の有理二重点

双対グラフ	定義方程式	Tjurina 数	基本群
$A_n (n \geq 1)$	$z^{n+1}+xy$	n (n even)	$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})'$
		$n+1$ (n odd)	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
D_{2m}	D_{2m}^0 $z^2+x^2y+xy^m$	$4m$	0
$(m \geq 2)$	D_{2m}^r $z^2+x^2y+xy^m+xy^{m-r}z$	$4m-2r$	$D_{(2r-m)'}$
D_{2m+1}	D_{2m+1}^0 $z^2+x^2y+y^mz$	$4m$	0
$(m \geq 2)$	D_{2m+1}^r $z^2+x^2y+y^mz+xy^{m-r}z$	$4m-2r$	$D_{4r-2m+1}$
E_6	E_6^0 $z^2+x^3+y^2z$	8	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
	E_6^1 $z^2+x^3+y^2z+xyz$	6	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
E_7	E_7^0 $z^2+x^3+xy^3$	14	0
	E_7^1 $z^2+x^3+xy^3+x^2yz$	12	0
	E_7^2 $z^2+x^3+xy^3+y^3z$	10	0
	E_7^3 $z^2+x^3+xy^3+xyz$	8	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
E_8	E_8^0 $z^2+x^3+y^5$	16	0
	E_8^1 $z^2+x^3+y^5+xy^3z$	14	0
	E_8^2 $z^2+x^3+y^5+xy^2z$	12	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
	E_8^3 $z^2+x^3+y^5+y^3z$	10	0
	E_8^4 $z^2+x^3+y^5+xyz$	8	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

定義 3.7.

$$\alpha_p = \mathrm{Spec}(k[t]/t^p) = \mathrm{Spec}(k[\tau]), \quad \tau^p = 0$$

とし、群スキーム構造を定義する *3* つの射

$$\begin{aligned} m &: \alpha_p \times \alpha_p \to \alpha_p \\ \epsilon &: \mathrm{Spec}\, k \to \alpha_p \\ inv &: \alpha_p \to \alpha_p \end{aligned}$$

を次の射による *Hopf* 代数 $k[\tau]$ を用いて定義する。

$$\begin{aligned} m^* &: k[\tau] \to k[\tau] \otimes k[\tau] & \tau &\mapsto \tau \otimes 1 + 1 \otimes \tau \\ \epsilon^* &: k[\tau] \to k & \tau &\mapsto 0 \\ inv^* &: k[\tau] \to k[\tau] & \tau &\mapsto -\tau \end{aligned}$$

次に、この α_p による局所アフィン平面 $X = \mathrm{Spec}\, A = \mathrm{Spec}\, k[[X, Y]]$ への作用を定義する。α_p による局所アフィン平面 $X = \mathrm{Spec}\, A = \mathrm{Spec}\, k[[X, Y]]$ への作用とは、スキームの射 $\sigma : \alpha_p \times X \to X$ であり以下の図式を可換にするものとである。

$$
\begin{tikzcd}
\alpha_p \times \alpha_p \times X \arrow[r, "1_{\alpha_p}\times\sigma"] \arrow[d, "m\times 1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \alpha_p \times X \arrow[d, "\sigma"] \\
\alpha_p \times \operatorname{Spec} A \arrow[r, "\sigma"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\alpha_p \times X \arrow[r, "\sigma"] & \operatorname{Spec} k \times X \arrow[l, bend left, "\epsilon\times 1_X"]
\end{tikzcd}
$$

これを *Hopf* 代数の射で書き直すと次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
k[\tau]\otimes k[\tau]\times A \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & k[\tau]\otimes A \arrow[l, "1_{k[\tau]}\otimes\sigma^*"'] \\
k[\tau]\otimes A \arrow[u, "m^*\otimes 1_A"] & A \arrow[l, "\sigma^*"] \arrow[u, "\sigma^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[\tau]\otimes A \arrow[r, bend right, "\epsilon^*\otimes 1_A"'] & k\otimes A \arrow[l, "\sigma^*"']
\end{tikzcd}
$$

即ち、次をみたす。

$$
(1_{k[\tau]}\otimes\sigma^*)\circ\sigma^* = (m^*\otimes 1_A)\circ\sigma^*
$$
$$
(\epsilon^*\otimes 1_A)\circ\sigma^* = 1_A
$$

ここで、作用 σ に対応する余作用 σ^* を具体的に書き下してみると、$\tau^p=0$ であることに注意して、

$$
\sigma^* : A \to k[\tau]\otimes A \cong A[\tau], \quad \tau^p = 0
$$
$$
x \mapsto \delta_0(x) + \delta_1(x)\tau + \delta_2(x)\tau^2 + \cdots + \delta_{p-1}(x)\tau^{p-1}
$$

を得る。ここで各 $(a \le i \le p-1)$ は A の k 自己準同型であり、次の命題により δ_1 のみにより決まることがわかる。

命題 3.8. 上の記号の基で次が成り立つ。

(i) δ_0 は恒等写像 1_A に等しい。

(ii) δ_1 は k 導分である。即ち、*Leibniz* の法則をみたす k 自己準同型である。

(iii) δ_1 は p 閉 *(p-closed)* である。即ち、

$$
\delta_1^p = 0
$$

が成り立つ。

(iv) 各 $i(1 \le i < p)$ に対して、δ_i は以下の通り δ_1 によって与えられる。

$$
\delta_i = \frac{1}{i!}\delta_1^i
$$

Rudakov と Shafarevich により基本的なことが整備されたが、この k 導分 δ_1 を用いることにより可換環 A への α_p 作用 σ による不変式環が記述できる。(Rudakov-Shafarevich [20] 参照)

定理 3.9 (Rudakov-Shafarevich [20][19]). A への α_p 作用による不変式環は、δ_1 定数部分環、即ち $\operatorname{Ker}\delta_1$ に等しい。

特に、$\operatorname{Ker}\delta_1$ は A の *Frobenius* 射による像 $F(A)$ を含んでいる。従って、得られる特異点は指数 1 の *Frobenius* サンドイッチ特異点である。

$$A \supset \operatorname{Ker}\delta_1 \supset F(A)$$

例 3.10. 標数が 2 の D_4^0 型特異点は、以下で定義される k 導分 $\delta : A = k[[X,Y]] \to A$ による群スキーム商特異点である。

$$\delta_1 := X^2\frac{\partial}{\partial X} + Y^2\frac{\partial}{\partial Y}.$$

実際、k 導分 δ_1 の核 $\operatorname{Ker}\delta_1$ は k 上 $X^2, Y^2, X^2Y + XY^2$ により生成され、従って不変式環は

$$k[[X^2, Y^2, X^2Y + XY^2]] \cong k[[x,y,z]]/(z^2 + x^2y + xy^2)$$

で与えられる。これは *Artin* の表 *3* より D_4^0 型特異点である。

指数 1 の平面 Frobenius サンドイッチ特異点は、このように k 導分による商で得られるが、k 導分の代わりに高階 k 導分を用いることで、より高い指数 $e > 0$ の平面 Frobenius サンドイッチ特異点が得られる。即ち、$A = k[[X,Y]]$ と、その Frobenius 射の e 回合成による像 $F^e(A) = k[[X^e, Y^e]]$ によりサンドイッチされる特異点 R であって、$R \not\supset F^{e-1}(A)$ となるものである。(宮西 [19] 等を参照のこと。)

注意 3.11. 次に与える $A = k[[X,Y]]$ 上の k 導分は、任意の標数 p において定義され、$p > 2$ では有理二重点ではない特異点を与える。

$$\delta_1 := X^p\frac{\partial}{\partial X} - Y^p\frac{\partial}{\partial Y},$$

このとき、不変式環は

$$k[[X^p, Y^p, X^pY + XY^p]] \cong k[[x,y,z]]/(z^p + x^py + xy^p),$$

で与えられ、双対グラフは例 *3.3* で与えたものと同じである。従って、特に *taut* 特異点では無いことがわかる。

余談であるが、Jacobson による 60 年代の仕事 (例えば Jacobson [14] 参照) により、指数 1 の Frobenius サンドイッチ環には Galois 型の定理が成り立つ。

命題 3.12. (Jacobson [14], 宮西 [19])(Jacobson-Galois 対応) A を有限生成 k 整域とし $F(A)$ をその Frobenius 像とする。K を A の商体、$F(K)$ をその Frobenius 像とする。$\operatorname{Der}_k(A) = \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/k}, A)$ (resp. $\operatorname{Der}_k(K) = \operatorname{Der}_k(A) \otimes_A K$) を A (resp. K) 上の k 導分のなす環とする。

このとき、$\operatorname{Der}_k(A)$、従って $\operatorname{Der}_k(K)$ は p-Lie 代数となる。即ち Lie 括弧積と p 乗で閉じている。また、

$$\mathcal{M} := \{K \supset M \supset F(K) | \text{ subfield}\}$$
$$\mathcal{L} := \{L \subset \operatorname{Der}_k(K) | \ p\text{-Lie subalgebra}\}$$

$$\mathcal{M}_A := \{A \supset B \supset F(A) | \text{normal } k\text{-subalgebra}\}$$
$$\mathcal{L}_A := \{L \subset \operatorname{Der}_k(A) | \text{saturated } p\text{-Lie subalgebra}\}$$

とすると、Galois 対応は以下で与えられる。

$$\mathcal{M} \ni M \mapsto L(M) := \{\delta \in \mathrm{Der}_k(K) |\ \delta|_M = 0\} \in \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} \ni L \mapsto M(L) := \{\xi \in K | \delta(\xi) = 0 (\forall \delta \in L)\} \in \mathcal{M}$$

$$\mathcal{M}_A \ni B \mapsto L(Q(B)) \cap \mathrm{Der}_k(A) \in \mathcal{L}_A$$

$$\mathcal{L}_A \ni L \mapsto M(L_K) \cap A \in \mathcal{M}_A$$

3.2. **α_p 作用と $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用の統一的扱い.** Artin による分類表を見ていると気がつくが、taut ではない特異点では、同じ双対グラフを持つ特異点で、基本群が自明であるものと位数が標数で割れるものがあることが分かる。例えば、標数が 2 の場合の D_4^0 型特異点と D_4^1 型特異点である。実は、それらは偶然ではなく、一方は有限群による野生的商特異点であり、他方は有限群スキームによる商特異点である。そして、これら有限群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ による作用と加法群スキーム α_p による作用は統一的に扱うことが出来る。そのために、パラメータ λ によりパラメータ付けされた群スキーム G_λ を定義する。

定義 3.13. λ をパラメータとして、スキーム G_λ とその上の群スキーム構造を以下により与える。

$$\begin{aligned} G_\lambda =& \mathrm{Spec}(k[t]/t^p - \lambda^{p-1}t) = \mathrm{Spec}(k[\tau]) \qquad \tau^p = \lambda^{p-1}\tau \\ m :& G_\lambda \times G_\lambda \to G_\lambda \\ \epsilon :& \mathrm{Spec}\, k \to G_\lambda \\ inv :& G_\lambda \to G_\lambda \end{aligned}$$

Hopf 代数の言葉で書き直すと次の通りとなる。

$$\begin{aligned} m^* &: k[\tau] \to k[\tau] \otimes k[\tau] & \tau &\mapsto \tau \otimes 1 + 1 \otimes \tau \\ \epsilon^* &: k[\tau] \to k & \tau &\mapsto 0 \\ inv^* &: k[\tau] \to k[\tau] & \tau &\mapsto -\tau. \end{aligned}$$

このとき、 $\lambda = 0$ のとき $G_0 = \alpha_p$ であり、$\lambda \neq 0$ ならば $G_\lambda = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ となることに注意する。

さらに、G_λ による $X = \mathrm{Spec}\, A$ への作用 $\sigma_\lambda : G_\lambda \times X \to X$ を次の通り定義する。

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \times G_\lambda \times X \arrow[r, "1_{G_\lambda} \times \sigma_\lambda"] \arrow[d, "m \times 1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_\lambda \times X \arrow[d, "\sigma_\lambda"] \\ G_\lambda \times \mathrm{Spec}\, A \arrow[r, "\sigma_\lambda"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\lambda \times X \arrow[r, "\sigma_\lambda"] & \mathrm{Spec}\, k \times X \arrow[l, bend left, "\epsilon \times 1_X"] \end{tikzcd}$$

Hopf代数の方では、以下で与えられるものとする。

$$
\begin{tikzcd}
k[\tau]\otimes k[\tau]\times A & k[\tau]\otimes A \arrow[l, "1_{k[\tau]}\otimes\sigma_\lambda^*"'] \\
k[\tau]\otimes A \arrow[u, "m^*\otimes 1_A"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & A \arrow[l, "\sigma_\lambda^*"] \arrow[u, "\sigma_\lambda^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[\tau]\otimes A \arrow[r, bend right, "\epsilon^*\otimes 1_A"'] & k\otimes A \arrow[l, "\sigma_\lambda^*"']
\end{tikzcd}
$$

即ち

$$(1_{k[\tau]}\otimes\sigma_\lambda^*)\circ\sigma_\lambda^* = (m^*\otimes 1_A)\circ\sigma_\lambda^*,\quad (\epsilon^*\otimes 1_A)\circ\sigma_\lambda^* = 1_A$$

が成り立つ。このとき、α_p の場合と同様に σ_λ^* を

$$\begin{aligned}
\sigma_\lambda^* : A \to k[\tau]\otimes A \cong A[\tau],&\quad \tau^p = \lambda^{p-1}\tau \\
x \mapsto \delta_0^{(\lambda)}(x) + \delta_1^{(\lambda)}(x)\tau &+ \delta_2^{(\lambda)}(x)\tau^2 + \cdots + \delta_{p-1}^{(\lambda)}(x)\tau^{p-1}
\end{aligned}$$

と書き表すと命題 3.8 と同様に、次の性質が得られる。

命題 3.14. 上の記号のもと、次のそれぞれが成り立つ。

(i) $\delta_0^{(\lambda)}$ は恒等写像 1_A に等しい。

(ii) $\delta_\lambda := \delta_1^{(\lambda)}$ は k 線形準同型であり次の擬 *Leibniz* 法則をみたす。

$$\delta_\lambda(xy) = \delta_\lambda(x)y + x\delta_\lambda(y) + \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i!(p-i)!}\lambda^{p-1}\delta_\lambda^i(x)\delta_\lambda^{p-i}(g). \tag{3.1}$$

(iii) $\delta_1^{(\lambda)}$ は p 閉 (p-closed) である。即ち、

$$\delta_\lambda^p = 0$$

である。

(iv) 各 $i(1 \leq i < p)$ に対して、$\delta_i^{(\lambda)}$ は以下の通り δ_λ により与えられる。

$$\delta_i^{(\lambda)} = \frac{1}{i!}(\delta_\lambda)^i.$$

定義 3.15. 擬 *Liebniz* 法則をみたす A 上の k 線形準同型を k **擬導分**とよぶ。

従って 群スキーム G_λ の作用は、擬導分 δ_λ を与えることと同等であることがわかる。

3.3. G_λ **による商.** 以下、話を簡単にするために標数が $p=2$ とする。この場合、擬Leibniz法則 (3.1) は次のように表される。

$$\delta_\lambda(xy) = \delta_\lambda(x)y + x\delta_\lambda(y) + \lambda\delta_\lambda(x)\delta_\lambda(y)$$

また、「Frobeniusの世界」と「Artin-Schreierの世界」を統一的に考えるために *Frobenius-Artin-Schreier* 射 $\mathcal{F}as : A \to A$ を $\mathcal{F}as(f) := f(f + \lambda\delta_\lambda(f))$ と定義しておく。

群スキーム G_λ の作用による商は、それに付随して決まる擬導分による商を考えるのであるが、まず次に注意する。

定理 3.16. A への群スキーム G_λ 作用による商は存在し不変式環は δ_λ 定数部分環、即ち $\operatorname{Ker}\delta_\lambda$ に等しい。さらに、不変式環は A とその *Frobenius-Artin-Schreier* 射の像 $\mathcal{F}as(A)$ によってサンドイッチされる。

$$A \supset A^{G_\lambda} = \delta_\lambda\text{-}constant \supset \mathcal{F}as(A) := k[[\mathcal{F}as(X), \mathcal{F}as(Y)]]$$

一方、α_p 作用を定める導分 δ_λ に条件があれば、自然に擬導分に伸ばすことができる。従って α_p 作用から G_λ 作用を作ることができ、結果的に α_p 商特異点と $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 商特異点が 1 パラメータ変形でつながる。そのために一つ定義をする。

定義 3.17. $A = k[[X, Y]]$ 上の k 導分 δ が**被約**であるとは、

$$\delta = f\frac{\partial}{\partial X} + g\frac{\partial}{\partial Y}, \quad f, g \in A$$

と書いたとき、f と g が生成する A のイデアルが高さ *1* となるときをいう。

このとき次が成り立つ。

定理 3.18. δ を $A = k[[X, Y]]$ 上の加法的 k 導分で被約かつ p 閉とする。

(i) A 上の p 閉擬導分 δ_λ で $\delta_0 = \delta$ となるものが存在する。
(ii) δ_λ による商、即ち群スキーム G_λ 作用の不変式環は次で与えられる。

$$k[[X(X + \lambda\delta_\lambda(X)), Y(Y + \lambda\delta_\lambda(Y)), \delta_\lambda(X)Y + \delta_\lambda(Y)X]]$$

$$\cong k[[x, y, z]]/(z^2 + \lambda abz + xb^2 + ya^2), \quad \exists a, b \in k[[X, Y]]$$

証明 (i) δ_λ は k 線形準同型なので、$\delta_\lambda(X)$ と $\delta_\lambda(Y)$ により決まることに注意する。

さて、k 導分 δ が被約かつ p 閉であることから、$f(X^p, Y^p), g(X^p, Y^p) \in F(A) = k[[X^p, Y^p]]$ を用いて

$$\delta = f(X^p, Y^p)\frac{\partial}{\partial X} + g(X^p, Y^p)\frac{\partial}{\partial Y}$$

と書くことが出来る。

このとき、次の同時再帰方程式を解くことで $\delta_\lambda(X)$ と $\delta_\lambda(Y)$ が得られる。

$$\delta_\lambda(X) = f(X^2 + \lambda\delta_\lambda(X)X, Y^2 + \lambda\delta_\lambda(Y)Y)$$
$$\delta_\lambda(Y) = g(X^2 + \lambda\delta_\lambda(X)X, Y^2 + \lambda\delta_\lambda(Y)Y).$$

ここで、この同時再帰方程式はその式の形から $k[[X, Y]]$ 内で常に解くことができることに注意する。

(ii) は基本的に Artin による $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用による商の正規形の証明と同様である。詳細は伊藤 [12] を参照のこと。 □

D_4 型特異点を例に計算してみることにする。

例 3.19 (D_4 型特異点)**.** D_4^0 型特異点は次の k 導分による商として与えられる。

$$\delta = X^2\frac{\partial}{\partial X} + Y^2\frac{\partial}{\partial Y}.$$

$\delta(X)=X^2, \delta(Y)=Y^2$ なので、次の同時再帰方程式を得る。

$$\delta_\lambda(X)=X^2+\lambda\delta_\lambda(X)X$$
$$\delta_\lambda(Y)=Y^2+\lambda\delta_\lambda(Y)Y$$

これを $k[[X,Y]]$ 内で解いて

$$\delta_\lambda(X)=\frac{X^2}{1+\lambda X}$$
$$\delta_\lambda(Y)=\frac{Y^2}{1+\lambda Y}.$$

を得る。このとき、不変式環は

$$k[[\frac{X^2}{1+\lambda X},\frac{Y^2}{1+\lambda Y},\frac{X^2Y+XY^2}{(1+\lambda X)(1+\lambda Y)}]]\cong k[[x,y,z]]/(z^2+\lambda xyz+xy^2+x^2y)$$

となり、$\lambda\neq 0$ のとき D_4^1 型特異点を、$\lambda=0$ のとき D_4^0 型特異点をそれぞれ与える。

尚、D_4^0 型特異点は別の k 導分

$$\delta=Y^2\frac{\partial}{\partial X}+X^2\frac{\partial}{\partial Y}$$

によっても与えられ、この k 導分に定理を適用して δ_λ を求めると

$$\delta_\lambda(X)=\frac{Y^2+\lambda X^2Y}{1+\lambda XY}$$
$$\delta_\lambda(Y)=\frac{X^2+\lambda XY^2}{1+\lambda XY}.$$

となり、不変式環は

$$k[[\frac{X^2+\lambda XY^2}{1+\lambda^2XY},\frac{Y^2+\lambda X^2Y}{1+\lambda^2XY},\frac{X^3+Y^3}{1+\lambda^2XY}]]\cong k[[x,y,z]]/(z^2+\lambda xyz+x^3+y^3)$$

となるが、これはやはり $\lambda\neq 0$ のとき D_4^1 型特異点を、$\lambda=0$ のとき D_4^0 型特異点をそれぞれ与える。

3.4. **正標数有理二重点は群スキーム商特異点か.** さて、最後に表題の問いに対する、現時点で分かっていることを述べる。繰り返しになるが、まず次がわかっている。

(A) A_n 型特異点は標数に関係なく乗法的有限群スキーム μ_{n+1} 商特異点である。

(D) 標数 が $p\geq 3$ ならば標数 0 と同様に有限群商特異点である。

(E) E_6 $(p\geq 5)$、 E_7 $(p\geq 5)$、 E_8 $(p\geq 7)$ は標数 0 と同様に有限群商特異点である。

残るケースについては、現在解析途中であるが以下の通りである。

<u>(D) 標数 2 の D_n 型特異点について</u>

D_n^r $(n\geq 4, 0\leq r<\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$ のうち、

- D_{4m}^0 と D_{4m}^m は G_λ 商によりつながる。
- D_{4m+2}^0 は α_2 商である。

であることが具体的に分かっているが、残りの

- D_{4m}^r $(r\neq 0,m)$
- D_{4m+2}^r $(r\neq 0)$

- D^r_{2m+1}

については詳細は不明である。

(E) 標数 2 の E_r 型特異点について

- E^0_8 と E^2_8 は G_λ 商特異点として変形によりつながっている。
- E^0_6 と E^1_6 は A_1 型特異点の G_λ 商として変形によりつながっている。
- E^0_7 は α_2 商特異点である。

しかしながら、

- E^r_7 $(r = 1, 2, 3)$
- E^r_8 $(r = 1, 3, 4)$

については詳細は不明である。

(E) 標数 3 の E_r 型特異点について

- E^0_6 と E^1_6 は、それぞれ α_3 と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の商である。おそらく G_λ 商で記述できるものと思われる。
- E^0_7 と E^1_7 は A_2 型特異点の α_3 と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の商であり、おそらく G_λ 商で記述できるものと思われる。
- E^0_8 は α_3 商である。

残りの

- E^1_8, E^2_8

については詳細は不明。

(E) 標数 5 の E_r 型特異点について

- E^0_8 は α_5 商であり
- E^1_8 は $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ である。

これらは、おそらく G_λ 商で記述できるものと思われる。

標数が 2 の D 型特異点は非常に複雑であり、まだ全体像がはっきりとは見えない。しかしながら様々な理由から、

問題 1. (正標数) 有理二重点は群スキーム商特異点であるか

の答えは YES であろうと考えている。個々の特異点について具体的な作用を書き下すことが出来るレベルで、この問いに答えを与えることができると期待しつつ、報告を終わることとする。

References

[1] M. Artin, *Wildly ramified $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actions in dimension two*, Proc. AMS **52**, pp. 60-64 (1975).

[2] M. Artin, *Coverings of the Rational Double Points in Characteristic p*, in W. Baily, T. Shioda (eds.), *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, Iwanami Shoten, Tokyo, pp. 11-22 (1977).

[3] E. Brieskorn : Rationale Singularitäten Komplexer Flächen, Invent. Math. **4** pp.336–358, (1968).

[4] H. Cartan, *Automorphism Quotient d' un espace analytique par un groupe d' automorphismes*, in A symposium in honor of S. Lefschetz, Algebraic geometry and topology, Princeton University Press, Princeton, N. J. , pp. 90–102 (1957).

[5] D. Cutkosky, H. Srinivasan : The algebraic fundamental group of a curve singularity, J. Algebra **230** pp.101–126, (2000).

[6] M. Demazure and P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, (1970).

[7] A. Durfee : Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, L'Enseignement **XXV** 1-2, pp.131–163, (1979).

[8] N. Hara : F-blowups of F-regular surface singularities, Proc. Amer. Math. Soc., **140**, pp.2215-2226, (2012).

[9] N. Hara, T. Sawada : Splitting of Frobenius sandwiches, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B24**, pp.121–141, (2011).

[10] M. Hirokado : Singularities of multiplicative p-closed vector fields and global 1-forms of Zariski surfaces, J. Math. Kyoto Univ. **39**, pp.455–468, (1999).

[11] Y. Ishibashi and N. Onoda, *On the ring of constants of a diagonalizable higher derivation*, J. Pure and Applied Algebra, **81**, pp. 39–47 (1992).

[12] H. Ito, *Pseudo-derivations and wild group scheme quotient singularities*, in preparation.

[13] H. Ito and S. Schröer, *Wildly ramified actions and surfaes of general type arising from Artin-Schreier curves*, in C. Faber, G. Farkas, R. de Jong (eds), Geometry and Arithmetic in honor of Gerard van der Geer, EMS, pp. 213-241 (2012).

[14] N. *Basic Algebra III*, Springer-Verlag, 19??.

[15] H. Laufer *Taut two-dimensional singularities*, Math. Ann. **205**, pp. 131-164 (1973).

[16] Y. Lee, N. Nakayama : Simply connected surfaces of general type in positive characteristic via deformation theory, to appear in Proc. London Math. Soc.

[17] J. Lipman, *Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Inst. Hautes Étuedes Sci. Publ. Math. **36**, pp. 195279 (1969).

[18] M. Miyanishi *Wild $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}-$action on algebraic surfaces*, preprint, (2015).

[19] M. Miyanishi *Frobenius Sandwiches of Affine Algebraic Surfaces*, CRM Proceedings and Lecture Notes, **54**, pp. 243-260 (2011).

[20] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40**, no. 6, pp.1269–1307, (1976) (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **40**, no. 6, pp.1205–1237, (1976).

〒 278-8510 野田市山崎 2641, 東京理科大学理工学部数学科
E-mail address: `ito_hiroyuki@ma.noda.tus.ac.jp`