６．平面における回転と鏡映

科目：　線形代数学 IA 及び演習（１-３組）
担当：　相木

今回のプリントでは平面 $\mathbb{R}^2$ に焦点を当てて線形変換について解説する．特に回転と鏡映に対応する線形変換の特徴を見ていく．なお，このプリントでは $\mathbb{R}^2$ が解説の中心になるが，一般の $\mathbb{R}^n$ についても触れるので $\mathbb{R}^n$ と書いたら n は任意の自然数であるとする．

線形変換

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が線形写像のとき，f は $\mathbb{R}^n$ の**線形変換**であるという．
前回のプリントの内容を踏まえると，ある n 次正方行列 A があり，

$$f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$$

と表される．

線形変換とは $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像によって定まる変換である．定義域と値域が同じ $\mathbb{R}^n$ のときのみに線形変換と呼ぶことに注意．

直交行列

n 次正方行列 A が

$${}^tAA = A\,{}^tA = E_n$$

を満たすとき，A は n **次直交行列**（あるいは単に**直交行列**）であるという．

2 次正方行列の逆行列

行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で与えられる 2 次正方行列とする．このとき，

(i) 余因子行列

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる行列 $\mathrm{Cof}(A)$ を A の余因子行列という．$\mathrm{Cof}(A)$ の代わりに $\widetilde{A}$ とも書く．

(ii) 行列式

$$\det(A) = ad - bc$$

を A の行列式という．

(iii) 2 次正方行列の逆行列　$\det(A) \neq 0$ のとき，A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Cof}(A) \tag{1}$$

によって与えられる．

ここからは平面の回転・鏡映について解説する．以下では $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ と，それによって定まる幾何ベクトル（原点から $\boldsymbol{a}$ に向かって伸びる矢印）を同一視して回転や鏡映という操作を絵的に思い浮かべながら読むと分かりやすいと思う．

回転

最初に回転について解説する．ここで，約束ごととして角度は反時計回りを「正」の方向とし，時計回りを「負」の方向とする（これが一般的である）．

平面における回転

$\theta \in \mathbb{R}$ に対して写像 $r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$r_\theta(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \text{ を角度 } \theta \text{ 回転させたベクトル}$$

として定めると r_θ は $\mathbb{R}^2$ の線形変換であり，その表現行列 R_θ は

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．つまり，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して $r_\theta(\boldsymbol{a}) = R_\theta \boldsymbol{a}$ である．
このような変換を**角度 θ の回転**あるいは単に**回転**という．

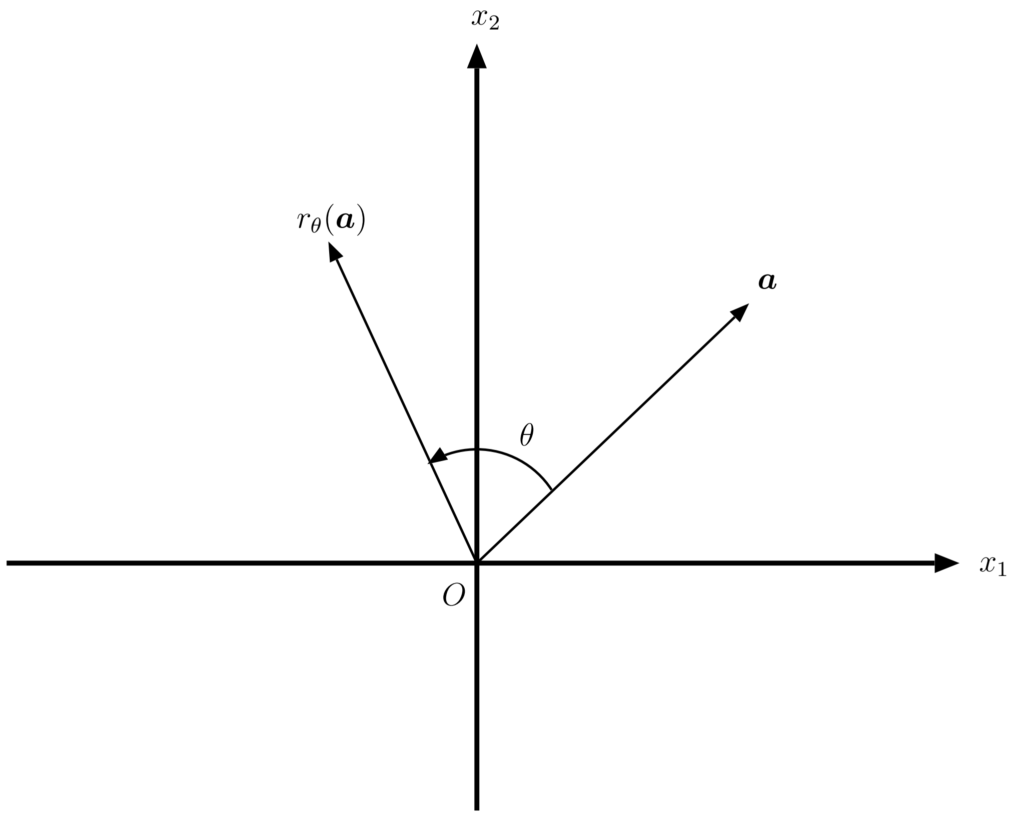

Figure 1: $\theta > 0$ のときの回転の例

鏡映

次に鏡映を解説する．鏡映とはある直線を軸として，その直線に関して線対称になる位置にベクトルを写す操作である．

鏡映

原点を通る $\mathbb{R}^2$ 内の直線 l に対して写像 $t_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$t_l(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \text{ と直線 } l \text{ を軸として線対称の位置にあるベクトル}$$

と定めると t_l は線形変換である．このとき，t_l を l に関する**鏡映**あるいは**対称変換**という．

直線 l は原点を通るとしているので，その傾きを c とすれば l は

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = cx_1\}$$

と表される．さらに，この直線 l と x_1 軸が作る角度を τ と置けば $c = \tan\tau$ である．このとき，t_l の表現行列 T_τ は

$$T_\tau = \begin{pmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ \sin 2\tau & -\cos 2\tau \end{pmatrix}$$

で与えられる．

注意：形は似ているが T_τ は回転を表す行列ではないことに注意（演習問題参照）．

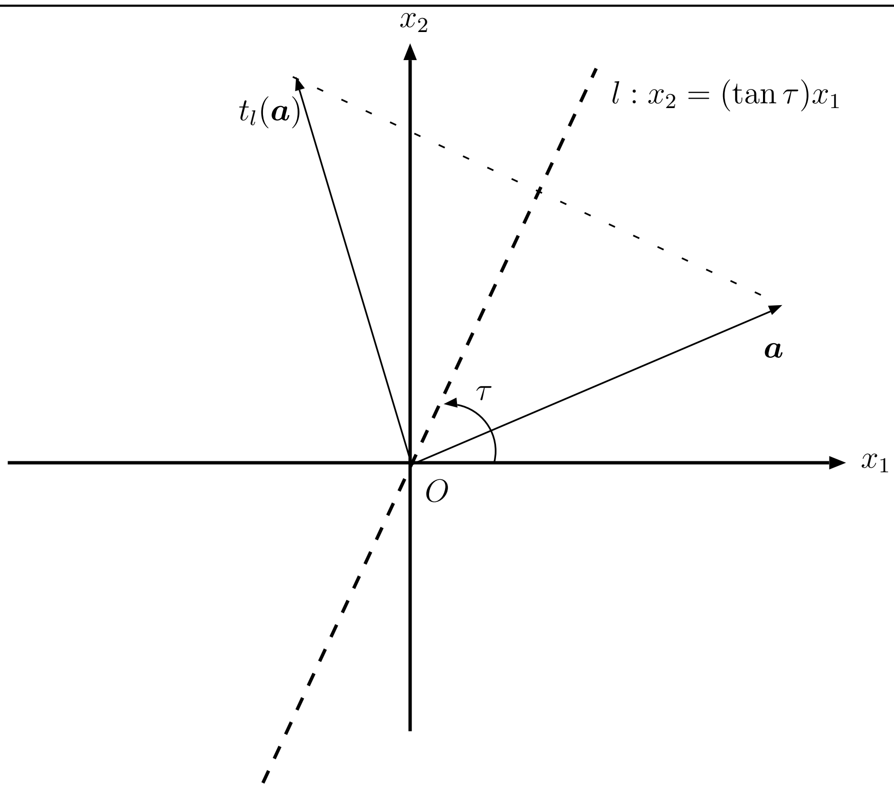

Figure 2: 鏡映の例

注意：鏡映を線形変換として定義する上で直線 l が原点を通ることは必須である．原点を通らない直線に対して同じように変換を定義してもそれは線形変換にはならない．

予約制問題

(6-1) $\forall\theta,\tau\in\mathbb{R}$ に対して $R_\theta\neq T_\tau$ であることを示せ．

(6-2) $\forall\theta\in\mathbb{R}$ に対して R_θ は直交行列であることを示せ．

(6-3) $\forall\tau\in\mathbb{R}$ に対して T_τ は直交行列であることを示せ．

早いもの勝ち制問題

(6-4) R_θ^{-1} を（存在すれば）公式 (1) に当てはめて求めよ．

(6-5) T_τ^{-1} を（存在すれば）公式 (1) に当てはめて求めよ．

(6-6) 2 次正方行列 A と $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2$ に対して $(A\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},{}^tA\boldsymbol{b})$ を示せ．

(6-7) $\mathbb{R}^2$ の回転と鏡映はともにベクトルの長さを保つ変換であることを示せ．
ここで，$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ がベクトルの長さを保つとは

$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2,\ |f(\boldsymbol{x})|=|\boldsymbol{x}|$$

が成り立つことである．

(6-8) 以下で与えられる行列 A が直交行列であるかを定義にしたがって判定せよ．

$$\text{(i)}\quad A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad\qquad \text{(ii)}\quad A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(6-9) 2 次正方行列 A は直交行列であるとする．このとき，$|\det(A)|=1$ であることを示せ．また，反例を挙げることによってこの逆は必ずしも成り立たないことを示せ．