中間試験の略解と解説

問題 1: (1), (3), (5).
解説: 数学の一般常識を問う問題です. (2) は可算集合, (4) は有限集合です. 分からなかった人は集合論の本で調べましょう. たとえば [森田].

問題 2: サンプルの解説で示したのは $\mathbb{Q}$ が完備でないということでした. その方法を真似るのはいいですが, $\sqrt{2}-1$ がどうのこうのということで, $(0,1]$ の非完備性を示したことにはなりません. この場合は 0 に着目すべきです. たとえば $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する $(0,1]$ の点列です. 収束しているのだからコーシー列です. しかし収束先は $(0,1]$ から飛び出てしまっているわけなので, 距離空間 $(0,1]$ は完備ではありません.

問題 3: 意外に出来ていなかった問題です. $f^2=f$ は, 各点 $x\in X$ で $f(x)^2=f(x)$ が成り立つことを意味します. これから明らかに各点 $x\in X$ では, $f(x)=0$ か $f(x)=1$ になります. そこで $A\subset X$ を $A:=\{x\in X \mid f(x)=1\}$ と定めれば, 明らかに $f=1_A$ です.
いくらかの解答では $f=0$ か $f=1$ を意味すると勘違いしていました. また, 部分集合 A を f から構成しなくてはならないのに, 何故か途中で A がひょっこり現れて「$f=1_A$ の時は何々」としている解答もありました.

問題 4: たとえば, $\mathbb{R}$ でルベーグ外測度を考えればそうなります.
X が可算集合であったら, 劣加法性から $\Gamma(X)=0$ となるので, 例をあげるとしたら X は非可算集合でなくてはならない (必要条件) のは正しいのですが, 一部の解答では「非可算集合をとってくればよい」としていました. これはおかしなことで, たとえば $\Gamma\colon 2^X\to[0,\infty]$ が 0 写像, つまり $\Gamma(A)=0$ $(\forall A\in 2^X)$ としてみるとただ非可算集合を取ってくるだけでは駄目だということが分かるはずです.

問題 5: (1), (4).
解説: これは大分できていましたが, 中には (3) を選んだ解答もありました. $f(x)$ がほとんど至るところ 0 に等しいというのは, 定義から集合 $\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\neq 0\}$ のルベーグ測度が 0 ということです. この集合を (1) から順に調べていけば分かることです. 実際, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[0,1]$, $\mathbb{N}$ となりますからこれから (1) と (4) を選ばなければならないことが分かるでしょう. ちなみに関数 $\infty\cdot 1_{\{0\}}$ や $\infty\cdot 1_{\mathbb{N}}$ はどうでしょうか? これも定義通り考えれば分かることですね.

問題 6: 多分 1 人ぐらいしか正解しませんでした. この手の問題ではまず $1/x$ の性質を分かっていると反例を出しやすいと思います. 実際 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx=\infty$ ですが, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx<\infty$ なので, $f(x)=1/x^2$ があやしいわけです. しかしたとえ $x=0$ の値を $f(0)=0$ としたところで, 正解にはなりません. なぜならこれでは f は可積分ではないからです ($\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx=\infty$ だから). そうしたら $x=0$ 付近の関数をいじってやればいいのです. たとえば, 次のように発散を止めてやれます.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } |x|\le 1,\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{if } |x|\ge 1.\end{cases}$$

ちなみに正解した人は $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ を挙げてくれました. $\sqrt{f}$ がルベーグ可積分でないことはよく知られています.

問題 7: まず一般に, $g(x)\le h(x)$ a.e. x なら $\displaystyle\int_X g\,d\mu\le\int_X h\,d\mu$ であることに注意しよう (零集合の違いは積分の値には全く反映されない). いまの場合では $g=|f|$, $h=M1_X$ とすれば, $\int_X |f(x)|\,d\mu\le\int_X M1_X\,d\mu$ が言えます. ここで $M>0$ が定数であること (x に依存しないということ) から M を積分の外に出せて, $\int_X |f(x)|\,d\mu\le M\mu(X)<\infty$ が分かります.

問題 8: f が正値であること, また x^n も正値 (積分区間が $[0,1]$ だから) であるから項別積分定理を使えば,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x)\,dx.$$

と変形できます. 後は等比級数の公式から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ a.e. x なので (測度零集合 $\{0,1\}$ の上の関数値は積分に寄与しない), 与式が従います.

問題 9:
(1). まず $\mathrm{Arctan}(x)' = 1/(1+x^2)$ です. もし忘れてしまっても逆関数の微分の公式を憶えていれば求められます. また, その公式を忘れてしまったとしてもその出所の合成関数の微分の公式を知っていれば分かります.

いくつかの解答では, 「$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Arctan}(x) + C$ だから $1/(1+x^2)$ は可積分である」と結論づけていました. 可積分であることは不定積分を具体的に求められることではなく, 「**絶対値をつけて積分しても発散しない**」という意味なので間違えないでください. したがって $1/(1+x^2)$ を積分しないといけません. さっきの $\mathrm{Arctan}(x)$ の話を使うと, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi < \infty$ ということが分かります. また「遠方で x^{-2} のスピードで減衰している関数は遠方での積分は発散しないことから可積分」としてもよいです.
(2). いろんな方法があります. $|x| > 1$ と $|x| \leq 1$ と場合分けしていた解答が多かったです. また微分を使って最大値を実際求めたものもありました. しかしここでは M' の正確な値を知りたいのではなく, $M' < \infty$ を知りたいだけなので, 次のよく使う補題を使えばよいでしょう.

補題 1 関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がもし次の 3 条件をみたせば, $\sup\{|g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} < \infty$ である.

- g は連続関数である.
- 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)$ が存在する.
- 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$ が存在する.

証明は連続関数が有界閉区間上で最大値を取ることを使えば簡単です. 各自やっておいてください ([杉浦] で技術を磨いてください). また自分で適当にグラフを書いて納得して, この補題は常識として憶えてください. (2) はこれを使えば簡単です. 関数 $(1+x^2)/(1+|x|^3)$ は明らかに連続関数ですし, $|x| \to \infty$ での極限は 0 です. よって $M' < \infty$ です.
(3). $|f(x)|$ を

$$|f(x)| = |f(x)|(1+|x|^3)\cdot\frac{1+x^2}{1+|x|^3}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

と変形すれば, 上限の性質から $|f(x)| \leq MM'/(1+x^2)$ が分かります. また M, M' は定数であることと (1) を使って

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{MM'}{1+x^2}\,dx = MM'\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

(4). (2) と同様です. 関数 $|x|(1+x^2)/(1+|x|^3)$ は連続で $|x| \to \infty$ では 1 に収束しますから, その上限 M'' は有限です. また

$$|xf(x)| = |f(x)|(1+|x|^3)\cdot\frac{|x|(1+x^2)}{1+|x|^3}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

より (3) と同様に $xf(x)$ の可積分性が分かります.
(5). 微分と積分の交換定理を使います. そのために $g(x,y) := f(x)e^{-iyx}$ とおきます. まずこれは y について偏微分可能であって $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -ixf(x)e^{-iyx}$ となりますから, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}\right| = |xf(x)|$ と絶対値を評価

できます. 問題 (4) によればこの右辺の $|xf(x)|$ は可積分であり, しかも変数 y に依存していません. よって微分と積分の交換定理より, $\hat{f}$ は微分可能であり

$$\hat{f}'(x) = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-iyx}\,dx$$

が従います.

この問題では $|e^{-iyx}| = 1$ が分かっていない人がいました. 実数 θ に対して $|e^{i\theta}| = 1$ は常識です. 分からない人は解析の本を見てください. あと途中からなぜか $f(x) = e^{-x^2}$ と変化していく答案が多く見られました. サンプルを参考にしすぎてしまったのでしょうが, $f(x)$ はただ可測関数としか書いていないので, これでは全くの間違いです.

(6). これは 1 人ぐらいしかできていませんでした. 連続性を示すのには, 開集合の逆像がどうのというよりは, 点列を使うと簡単になることが多いです.

$\mathbb{R}$ の点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $y \in \mathbb{R}$ に収束したとします. つまり $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ です. このとき $\hat{f}'(y_n) \to \hat{f}'(y)$ を示せば, $\hat{f}'$ の連続性を証明したことになります. まず $\hat{f}'(y_n)$ は, (5) により

$$\hat{f}'(y_n) = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-iy_nx}\,dx$$

です. $\lim_{n\to\infty}$ を積分の中に入れるためにルベーグの収束定理を使えることをチェックします.

まず $g_n(x) := -ixf(x)e^{-iy_nx}$ とおきます. 絶対値を評価すると $|g_n(x)| = |xf(x)|$ となり, 特に $|g_n(x)|$ を n に依存しない可積分関数でおさえられました. また $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = xf(x)e^{-iyx}$ は明らかです. よってルベーグの収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\hat{f}'(y_n) = -i\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} xf(x)e^{-iy_nx}\,dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-iyx}\,dx = \hat{f}'(y).$$

したがって $\hat{f}'$ の連続性を示せました.

総評: ルベーグ積分論で一番大事なのは, ルベーグの収束定理です. 最後の問題で特に (5),(6) の配点を大きくしてありますから, たとえ (1) から (4) に手を付けられなくても, それらをつかって (5) と (6) は解けるはずです. 実際他はあんまりできていなくても, ここで点数を稼いでいる答案もいくらかありました. 期末でも大体同じ形式なので, 点数が伸び悩んでしまった人は解く順番について一考するとよいと思います.

また可算無限, $\mathbb{R}$ の濃度, 距離空間の完備性, 関数の可積分性など根本的に定義を正確に分かっていない人もいくらかいます. さすがに言葉の意味が分からないと数学はできないので出来なかった人はすぐに復習してください. あと定理や何かの結果を使う場合は「何々だからこれこれという定理を使える」と宣言しなければいけません. 根拠が明らかでなければ解答として不十分です.

数学を理解するにはとにかく場数をこなすしかないと思います. ルベーグ積分についても演習が載っている本やウェブページは沢山あるので, 手当たり次第やってみると力が自然についてくると思います.

参考文献

[森田] 森田 茂之, 集合と位相空間, 朝倉書店.

[杉浦] 杉浦 光夫, 解析入門, 東大出版会.