解析学 IB 後期中間試験 (2009/12/1)

担当: 戸松 玲治

注意: 本試験問題では, $\mathbb{R}$ の測度はルベーグ測度である.

問題 1 (5 点) 次の (1) から (5) の集合うち, $\mathbb{R}$ への全単射を構成できる集合をすべて選べ.

(1) $(0,1)$, (2) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$, (3) $2^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ の巾集合), (4) $2^{\{0,1,\dots,n\}}$ $(n\in\mathbb{N})$, (5) $[0,0.001)$.

問題 2 (5 点) $\mathbb{R}$ に絶対値から決まる距離を入れる. 部分距離空間 $(0,1]$ は完備でないことを示せ.

問題 3 (5 点) 集合 X 上の関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ が $f^2=f$ をみたしているとき, f はある集合の定義関数であること ($f=1_A$ となる部分集合 $A\subset X$ が存在すること) を示せ.

問題 4 (5 点) 集合 X に外測度 $\Gamma\colon 2^X\to[0,\infty]$ が与えられており, すべての点 $x\in X$ に対して, $\Gamma(\{x\})=0$ をみたしていても $\Gamma(X)=0$ とは限らない. そのような集合 X と外測度 Γ の例をあげよ.

問題 5 (5 点) 次の関数 $f\colon\mathbb{R}\to[0,\infty]$ のうち $f(x)=0$ a.e. x をみたすものをすべて選べ.

$$(1).\ f=1_{\mathbb{N}},\quad (2).\ f=1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}},\quad (3).\ f(x)=1_{[0,1]},\quad (4).\ f=\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{x\in\mathbb{N}\mid x\le n\}}.$$

問題 6 (5 点) 関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は可積分であるが, $\sqrt{|f|}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は可積分でない f の例をあげよ.

問題 7 (10 点) 測度空間 $(X,\mathscr{B},\mu)$ が有限 ($\mu(X)<\infty$ ということ) であるとき, もし可測関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ が次の条件 $(\star)$ をみたすならば, f は可積分であることを示せ.

$(\star)$ ある $M>0$ が不等式 $|f(x)|\le M$ a.e. x をみたす.

問題 8 (10 点) 可測関数 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ は正値 (すべての $x\in[0,1]$ に対して, $f(x)\ge 0$) であるとする. このとき次の等式を示せ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1\frac{f(x)}{1-x}\,dx.$$

問題 9 ((1),(2),(3),(4):5 点, (5),(6):15 点) 可測関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の意味で $1/(1+|x|^3)$ と同じ具合で 0 に減衰しているとする:

$$M:=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|(1+|x|^3)<\infty.$$

このとき次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Arctan}(x)$ の微分を求め (証明は必要ない), 関数 $\dfrac{1}{(1+x^2)}$ は可積分であることを示せ.

(2) $M':=\sup\left\{\dfrac{1+x^2}{1+|x|^3}\mid x\in\mathbb{R}\right\}<\infty$ を示せ.

(3) $|f(x)|\le\dfrac{MM'}{1+x^2}$ $(x\in\mathbb{R})$ を示し, f は可積分であることを示せ.

(4) $M'':=\sup\left\{\dfrac{|x|(1+x^2)}{1+|x|^3}\mid x\in\mathbb{R}\right\}<\infty$ を示し, 関数 $xf(x)$ は可積分であることを示せ.

(5) 実数 y の関数 $\hat{f}(y):=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}\,dx$ は微分可能であることを示せ.

(6) $\hat{f}$ の導関数 $\hat{f}'$ は連続であることを示せ.