問題 1 (5 点) 次の (1) から (5) の集合うち, $\mathbb{R}$ への全単射を構成できる集合をすべて選べ.

$$(1)\ \mathbb{N}, \quad (2)\ \mathbb{Q}, \quad (3)\ 2^{\mathbb{N}}\ (\mathbb{N}\text{ の巾集合}), \quad (4)\ \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad (5)\ [0,1).$$

問題 2 (5 点) 完備でない距離空間の例をあげよ.

問題 3 (5 点) Borel 空間 $(X, \mathscr{B})$ の部分集合 A について次の同値性を示せ.

$$A \in \mathscr{B} \iff \text{定義関数 } 1_A \colon X \to \mathbb{R} \text{ は Borel 可測}.$$

問題 4 (5 点) 集合 X に外測度 $\Gamma\colon 2^X \to [0,\infty]$ が与えられており, すべての点 $x \in X$ に対して, $\Gamma(\{x\}) = 0$ を満たすとする. このときすべての可算部分集合 $S \subset X$ に対して, $\Gamma(S) = 0$ であることを示せ.

問題 5 (各 5 点) 次の問いに答えよ.

(1) 複素数 α, β に対して, 不等式 $|\alpha+\beta|^2 \le 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ が成り立つことを示せ.

(2) $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を測度空間, $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ を可測関数とする. もし $|f|^2$ と $|g|^2$ が可積分ならば, $|f+g|^2$ も可積分であることを示せ.

(3) f, g が (2) の条件をみたせば, その積 fg は可積分関数であることを示せ.

問題 6 (5 点) 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可積分であるが, $|f|^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lebesgue 可積分でない f の例をあげよ.

問題 7 (10 点) 2 つの関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f(x) = g(x)$ a.e. x, つまりほとんど至るところ一致しているとする. 関数 f, g が両方とも連続関数であるときは, $f(x) = g(x)$ がすべての点 $x \in \mathbb{R}$ で成り立つことを示せ.

問題 8 (10 点) ルベーグ可測関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は正値, つまり $f(x) \ge 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ において成り立つとする. このとき次の等式を示せ:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/n} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

問題 9 (各 5 点) 各実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x \ge 0$ なら $f(x) := e^{-x}$ とし, $x < 0$ なら $f(x) = 0$ とおく. このとき次の問いに答えよ.

(1) 実数 $y \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 $\hat{f}(y) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx$ を定める. これを計算せよ.

(2) 極限についての等式 $\displaystyle\lim_{|y|\to\infty} \hat{f}(y) = 0$ を確かめよ.

(3) 等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\, dy$ を示せ.

問題 10 ((1,3,4):5 点, (2):10 点) 各実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x) = e^{-x^2}$ とおく. このとき次の問いに答えよ.

(1) 実数 $y \in \mathbb{R}$ に対して, 関数 $\hat{f}(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx$ を定めると, これは微分可能であることを示せ.

(2) 部分積分を利用して, 微分方程式 $\hat{f}'(y) = -\dfrac{y}{2}\hat{f}(y)$ を導け.

(3) $\hat{f}(y) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\dfrac{y^2}{4}\right)$ を示せ (等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ を使え).

(4) 等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\, dy$ を示せ.