サンプルの略解と解説

問題 1: (3), (4), (5).
解説: 数学の一般常識を問う問題です. 分からなかった人は集合論の本で調べよう. 例えば [森田].

問題 2: 例えば $(\mathbb{Q}, d)$. ここで距離関数 d は, $x, y \in \mathbb{Q}$ に対して $d(x,y) := |x-y|$ と定める.
解説: $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ は有理数ではないことは常識. 小数点第 n 桁で打ち切ったものを a_n と書けば, $\mathbb{R}$ において $a_n \to \sqrt{2}$ $(n \to \infty)$. とくに $(a_n)_n$ は有理数からなる Cauchy 列. しかし収束先は $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ なので, 距離空間 $(\mathbb{Q}, d)$ は完備でない.

問題 3: $(\Rightarrow)$: $1_A\colon X \to \mathbb{R}$ の可測性を示す. $a \in \mathbb{R}$ を任意に取ってくる. このとき次が成り立ちます.

$$\{x \in X \mid 1_A(x) < a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } a \leq 0, \\ A^c & \text{if } 0 < a \leq 1, \\ X & \text{if } 1 < a. \end{cases}$$

この 3 種類の集合はいずれも $\mathscr{B}$ の元だから (2 番目に関しては $\mathscr{B}$ が σ-field だから), 1_A は可測.
$(\Leftarrow)$: 次に 1_A は可測関数であるとする. このとき集合 $\{x \in X \mid 1_A(x) < 1\} = A^c$ は $\mathscr{B}$ の元. $\mathscr{B}$ は σ-field であるから, $A \in \mathscr{B}$.

問題 4: Γ の可算劣加法性を使います. S は可算無限集合なので, $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ と番号づけておきます. すると $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$ ですが, Γ の可算劣加法性により $\Gamma(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(\{a_n\})$ となります. 問題文の条件によれば, $\Gamma(\{a_n\}) = 0$ がすべての n に対して成り立ちますから $\Gamma(S) \leq 0$ です. 外測度の定義から $0 \leq \Gamma(S)$ なので, $\Gamma(S) = 0$.

問題 5: (1). 三角不等式によって $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. これから $|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$. この右辺について $(|\alpha| + |\beta|)^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ は引き算すれば簡単に分かります.
(2). (1) の不等式によって, $|f(x) + g(x)|^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ がすべての $x \in X$ で成り立ちます. したがって

$$\int_X |f(x) + g(x)|^2 \, d\mu(x) \leq 2 \int_X (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \, d\mu(x) = 2 \int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) + 2 \int_X |g(x)|^2 \, d\mu(x)$$

と押さえられ, 最右辺は有限値であるから $|f + g|^2$ は可積分.
(3). 任意の複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して, $2|\alpha\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$ が成り立つことは分かるでしょう. よって

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \frac{1}{2} \int_X (|f(x)|^2 + |g(x)|^2) \, d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_X |g(x)|^2 \, d\mu(x)$$

と押さえられ, 最右辺は有限値であるから fg は可積分.

問題 6: たとえば $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

と定めれば, 可積分かつ $|f|^2$ は非可積分となることは積分してみれば分かることです.

問題 7: $\mathbb{R}$ の測度はルベーグ測度を考えていることを書いておくべきでした. さて f と g の値が食い違っている点の集合 $U := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ を考えます. これはもちろん $\mathbb{R}$ の開集合です (分からない人は位相の本を勉強しよう. 例えば [森田]). もし $U \neq \emptyset$ であるならば, ある点 $x_0 \in U$ をとってこれます. U は $\mathbb{R}$ の開集合ですから, ある $\varepsilon > 0$ が $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$ となるように存在します. ところで f と g は, ほとんど至るところ一致しているため右辺の U の (ルベーグ測度による) 測度は 0 です. しかし左辺は 2ε の測度をもちます. ルベーグ測度の単調性により $2\varepsilon \leq 0$ ですが, $\varepsilon > 0$ に矛盾します. したがって $U = \emptyset$, つまり $f(x) = g(x)$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ でなりたちます.

問題 8: 関数 $g_n(x) := e^{-|x|/n} f(x)$ は, n に関して正値単調増加 ($0 \le g_1 \le g_2 \le \cdots$ ということ) かつ $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ がすべての $x \in X$ で成り立つ. よって単調収束定理 (Beppo-Levi の定理) より

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

(注意: もちろん f の可積分性は仮定していないので、積分の値は $+\infty$ かもしれません).

問題 9: 問題 9 と 10 はフーリエ変換についての問題です.
(1). 原始関数を求めてしまえばよいです.

$$\hat{f}(y) = \int_0^{\infty} e^{-(1+iy)x}\, dx = \left[\frac{e^{-(1+iy)x}}{-(1+iy)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+iy}.$$

(2). $|\hat{f}(y)|$ の大きさを評価してみると, $|\hat{f}(y)| = 1/\sqrt{1+y^2}$. これはもちろん $|y| \to \infty$ のとき 0 に収束します (Riemann-Lebesgue の定理の一例).
(3). 計算しましょう. 左辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

右辺は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arctan}(y)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

よって両者等しいことが分かりました (L^2 関数に対する Parseval の等式の一例).

問題 10: (1). $g(x,y) := f(x)e^{-iyx}$ と定めると, 明らかに y で偏微分可能であって $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -ixe^{-x^2}e^{-iyx}$ となります. 次に絶対値を評価しましょう. すると

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = |x|e^{-x^2}.$$

特に y に依存しない可積分関数 $|x|e^{-x^2}$ で, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を押さえられました (今はもっと強く等号もいえています). よって微分と積分の交換定理から $\hat{f}(y)$ は微分可能であり, その微分は

$$\frac{d\hat{f}}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-x^2}e^{-iyx}\, dx.$$

(2). 部分積分を $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ に適用します. すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{f}}{dy} &= \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-x^2}e^{-iyx}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2}(e^{-x^2})'e^{-iyx}\, dx \\
&= \left[\frac{i}{2}e^{-x^2}e^{-iyx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2}e^{-x^2}(e^{-iyx})'\, dx \\
&= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(-iy)}{2}e^{-x^2}e^{-iyx}\, dx \\
&= \frac{-y^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iyx}\, dx \\
&= \frac{-y^2}{2}\hat{f}(y).
\end{aligned}$$

(3). $G(y) = \sqrt{\pi}\exp(-y^2/4)$ とおきます. すると $G'(y) = \dfrac{-y^2}{2}G(y)$ となり関数 G も $\hat{f}$ と同じ一階の常微分方程式を満たします. よって初期条件が一致していることをチェックすれば $G = \hat{f}$ が言えます. 実際 $G(0) = \sqrt{\pi}$ であり, $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ となり両者等しいことが分かりました.

(4). これも Parseval の等式を実際に確認する問題です. まず左辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

そして右辺は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2 \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \exp(-y^2/2) \, dy = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

よって等号が示されました.

問題 9 と 10 で出てきた $\hat{f}$ のことを f のフーリエ変換といいます. 実は $f(x)$ がいい具合に $|x| \to \infty$ で減衰する関数については Riemann-Lebesgue の定理や Parseval の等式が一般的に成り立ちます. 何故そうなるか気になる人はフーリエ解析学を勉強してみよう (例えば [黒田]).

参考文献

[黒田] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版.

[森田] 森田 茂之, 集合と位相空間, 朝倉書店.