期末試験サンプルの略解

問題 1: (1), (3), (6). 順番がおかしいです。ごめんなさい。

問題 2: (3), (6). これも順番がおかしいです。

問題 3: (2), (4), (5).

問題 4: 各 n について, $x^n f(x)/n!$ は正値可測関数なので項別積分定理を用いることが出来る. あとは $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ に注意する.

問題 5: $h_n(x) := f(x+n)g(x)$ とおく. 条件より $n \to \infty$ のとき $h_n(x) \to 0$. また f は有界だから $M := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$ とおけば, $M < \infty$. よって $|h_n(x)| \le |g(x)|$ がすべての n でなりたつ. g は可積分関数だから, ルベーグの収束定理を使えて求める等式がいえる.

問題 6: 関数 $1_D \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は正値可測なので, フビニの定理を使えば,

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_D(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy 1_D(x,y)$$

となる. ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy 1_D(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,f(x)]}(y)\,dy = f(x)$$

より求める等式がいえる.

問題 7: $h(x,y) := f(x-y)g(y)$ とおく. まずこれが可積分であることを示す. 正値可測関数 $|h(x,y)|$ についてフビニの定理を使うと,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)|\,dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x-y)||g(y)| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x-y)| \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\,dy \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

よって $h(x,y)$ は可積分であることが言えた. それゆえ (絶対値をつけなくても) フビニの定理を使えて, 先ほどの絶対値がないバージョンの式変形がなりたつから求める等式を示せた.

問題 8: $[1,\infty]$ を $[1,\infty)$ に訂正. 被積分関数は f_n でした.
ルベーグの収束定理を使いたいので, $|f_n(x,y)| \le e^{-xy^2}$ と評価する (右辺に n が現れていないことに注意). e^{-xy^2} が可積分関数であることを示す. 正値関数に関するフビニの定理より,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)\times[1,\infty)} e^{-xy^2}\,dxdy &= \int_1^{\infty} dy \int_0^{\infty} dx\, e^{-xy^2} \\
&= \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2} = 1 < \infty.
\end{aligned}$$

よって e^{-xy^2} は可積分. また $n \to \infty$ のとき明らかに $f_n(x,y) \to e^{-xy^2}$ である. 以上よりルベーグの収束定理を使えて,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)\times[1,\infty)} f_n(x,y)\,dxdy = \int_{[0,\infty)\times[1,\infty)} e^{-xy^2}\,dxdy = 1.$$

問題 9:

(1). m_X は $\mathbb{N}^2$ の個数測度に他ならないから, D に含まれる格子点の数に等しく, $m_X(D) = 7$.

(2). 正値関数に関するフビニの定理から,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}^2} f(x,y)\,dxdy &= \int_{\mathbb{N}} dx \int_{\mathbb{N}} dy\, f(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{N}} dx \left(\frac{1}{2^x} \int_{\mathbb{N}} dy \frac{1}{2^y} \right) \\
&= \int_{\mathbb{N}} dx \left(\frac{1}{2^x} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{2^y} \right) \\
&= \int_{\mathbb{N}} dx \left(\frac{1}{2^x} \cdot 1 \right) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} = 1.
\end{aligned}$$

(3). $|g(x,y)| = f(x,y)$ であり, (2) より g は可積分である. したがってフビニの定理を使うと,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}^2} g(x,y)\,dxdy &= \int_{\mathbb{N}} dx \int_{\mathbb{N}} dy\, g(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{N}} dx \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^x \int_{\mathbb{N}} dy \frac{1}{2^y} \right) \\
&= \int_{\mathbb{N}} dx \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^x \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{2^y} \right) \\
&= \int_{\mathbb{N}} dx \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^x \cdot 1 \right) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^x = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$