

解析学 I 後期期末試験 サンプル

問題 1 (5 点) 次の (1) から (4) のうち、可算無限集合をすべて選べ。

- (1) $\mathbb{N}$, (3) $\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, (2) $2^{\mathbb{N}}$, (4) $\{0\}$, (5) $\mathbb{R}$, (6) すべての素数のなす集合。

問題 2 (5 点) $\mathbb{R}$ に絶対値から決まる距離を入れる。この位相に関してコンパクトな部分集合をすべて選べ。

- (1) $\mathbb{R}$, (3) $[0, 1]$, (2) $(0, 1)$, (4) $[0, 1] \cup (2, 3]$, (5) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, (6) $\{1, 2, 3\}$ 。

問題 3 (5 点) 次の関数の中から有界な関数をすべて選べ。

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$, (2) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$, (3) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$,
(4) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$. (5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2} - |x|$ 。

以下の問題では、各種収束定理や積分の交換定理などを使う場合は、なぜそれらが適用可能なのか理由を明確に記入すること。また $\mathbb{R}$ 上の積分はルベーグ測度による積分である。

問題 4 (10 点) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を正値可測関数とすると、次を示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n f(x)}{n!} dx = \int_0^{\infty} e^x f(x) dx.$$

問題 5 (10 点) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を有界連続関数、 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を可積分関数とする。もし $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ ならば、次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+n)g(x) dx = 0.$$

問題 6 (10 点) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を正値可測関数とし、部分集合 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$ を定める。このとき次を示せ。ただし部分集合 D の可測性は認めてよい。

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_D(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

問題 7 (10 点) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を可積分関数とする。このとき次を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y)g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy.$$

問題 8 (15 点) 直積空間 $X = [0, \infty) \times [1, \infty]$ にルベーグ測度の直積測度を与える。 $f_n(x, y) = \cos(xy/n)e^{-xy^2}$, $(x, y) \in X$ とするとき、次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x, y) dx dy$$

問題 9 ((1),(2),(3):10 点) 自然数の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ に個数測度 ν を与える。つまり $A \in 2^{\mathbb{N}}$ に対して、 $\nu(A) = |A|$ とする。直積空間 $X := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に ν と ν の直積測度 m_X を与える。次の問に答えよ。

(1) $D := \{(x, y) \in X \mid x/3 + 2/3 \leq y \leq 3x - 2, y \leq -x + 6\}$ とする。 $m_X(D)$ を求めよ。

(2) 関数 $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y) = 1/2^{x+y}$ と定める。積分 $\int_{\mathbb{N}^2} f(x, y) dx dy$ を求めよ。

(3) 関数 $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x, y) = (-1)^x/2^{x+y}$ と定める。積分 $\int_{\mathbb{N}^2} g(x, y) dx dy$ を求めよ。