

サンプル 1 の略解と解説

問題 1: (1), (3).

解説: (2) の集合は一点 $\{0\}$ と等しいので、可算無限ではありません。(4) の実数の集合は無限集合ですが、可算無限ではありません。Cantor の対角線論法参照。

問題 2: (1), (3).

解説: 「 $A \subset \mathbb{R}^2$ が閉 $\Leftrightarrow A^c \subset \mathbb{R}^2$ が開, つまり各点 $x \in A^c$ についてある (小さい) $\varepsilon > 0$ を取ることができて, 中心 x , 半径 ε の開球に A の元は含まれない」が成り立ちます。(2) の包含 $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ は稠密ですから, $\mathbb{Q}^2$ の元で $\mathbb{Q}^2$ ではない点も近似できてしまうので $\mathbb{Q}^2$ は閉ではありません (開でもありません)。(4) の集合は開正方形 $(-1, 1) \times (-1, 1)$ です。たとえば点 $x = (1, 1)$ はこの開正方形の外の点ですが, いくらでも開正方形の点で近似できてしまいますから閉ではありません。

問題 3: $X = A \cup B + (A \cup B)^c$ と $A \cup B = A \setminus B + B \setminus A + A \cap B$ を合わせると X の分解 $X = A \setminus B + B \setminus A + A \cap B + (A \cup B)^c$ が得られます。

さて与式 $1_A + 1_B = 1_{A \setminus B} + 1_{B \setminus A} + 2 \cdot 1_{A \cap B}$ を示しましょう。全ての点 $x \in X$ について

$$1_A(x) + 1_B(x) = 1_{A \setminus B}(x) + 1_{B \setminus A}(x) + 2 \cdot 1_{A \cap B}(x)$$

をチェックするということです。まず $x \in A \setminus B$ のときは, $1_A(x) = 1, 1_B(x) = 0$ なので左辺は 1 です。右辺では第 1 項の $1_{A \setminus B}(x)$ だけ 1 で残りは 0 ですから等式が成り立ちます。同様に $x \in B \setminus A$ のときも確かめられます。 $x \in A \cap B$ のときは, 左辺は 2, 右辺では第 3 項だけ 2 で残りは 0 ですからやはり等式が成り立ちます。最後の $x \in (A \cup B)^c$ のときは両辺とも 0 となり等式が成り立ちます。よって全ての点で等式をチェックできました。

問題 4: ある集合族が σ -field であるとは, 「空集合 $\emptyset$ が入る」, 「補集合を取る操作で閉じている」, 「可算和を取る操作で閉じている」の 3 つがなりたつことを言います。まず 1 つ目ですが, $\emptyset \in \mathcal{B}$ なので $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ です。2 つ目について, $A \in \mathcal{B}_Y$ を任意に取ってきます。すると $\mathcal{B}_Y$ の定義からある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $A = B \cap Y$ と表せます。すると A の Y での補集合は $A^c \cap Y$ なのでこれを計算すると $A^c \cap Y = B^c \cap Y$ が言えます。 $B^c \in \mathcal{B}$ なので ($\mathcal{B}$ は σ -field だから), $A^c \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ が言えました。最後に 3 つ目を示します。可算個の集合たち $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathcal{B}_Y$ から任意に取ってきましょう。すると $\mathcal{B}_Y$ の定義から可算個の $\mathcal{B}$ に入る集合たち $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して, $A_n = B_n \cap Y$ と表せます。すると $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n \right) \cap Y$ が言えて, $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{B}$ なので ($\mathcal{B}$ は σ -field だから), $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{B}_Y$ が言えます。従って $\mathcal{B}_Y$ は Y の σ -field となります。

問題 5: (1). A_n たちは σ -field $\mathcal{B}$ の元で, $B_k = \bigcup_{n=k}^\infty A_n$ だから $B_k \in \mathcal{B}$ です。また $B_k = A_k \cup B_{k+1}$ なので $B_k \supset B_{k+1}$ です。

(2). 測度の劣可算加法性から

$$\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$$

が成り立ちます。これは仮定から有限の値です。

(3). $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ は単調減少な Borel 集合列で, 始めの B_1 の測度が有限であったので測度の収束定理が使えて

$$\begin{aligned} \mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty B_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=1}^N B_n\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) \end{aligned} \tag{0.1}$$

が成り立ちます。ところで $\mu(B_N)$ についてやはり (2) のように μ の劣加法性を使うと

$$\mu(B_N) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n)$$

と評価出来ます。仮定から $\mu(A_n)$ たちの無限和が有限値に収束しますからもちろん

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

です。したがって $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) = 0$ も言えます。よって不等式 (0.1) より $\mu(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}) = 0$ が言えます。

問題 6: $f_n(x) = \exp(-x^2) \exp\left(\frac{ix}{n}\right)$ とおきます。まず各点 $x \in \mathbb{R}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \exp(-x^2)$ が言えます。また絶対値を評価すると $|f_n(x)| = \exp(-x^2)$ となります。右辺は x についての可積分関数であり、 n に依存せず各 $|f_n(x)|$ を (この場合は等式ですが) 上から押さえています。よって Lebesgue の収束定理を使って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

問題 7: $f_n(x)$ は $x \in (0, 1]$ で連続関数であることは簡単に分かるので (Lebesgue の収束定理を使ってください), 特に可測関数であることを注意しておきます。また $f_n \geq 0$ なので積分を定義できることもよいでしょう。さて関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は被積分関数 $\exp(-xy^2)$ が正なので明らかに $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ と単調増加します。よって単調収束定理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

となりますが,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-xy^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

ですから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{\pi}{x}} dx = 2\sqrt{\pi}.$$

問題 8: (1). $f(x, t) := \exp(-tx) \frac{\sin x}{x}$ とおきます。 $f(x, t)$ が各 $t > 0$ に対して、 x の可積分関数であることは、 $\exp(-tx)$ が可積分であることと関数 $\sin x/x$ が有界であることから従います。(有界性はなぜ言えるのでしょうか。実際、上限 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin x/x|$ の値はいくつでしょうか)。また

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\exp(-tx) \sin x$$

が成り立ちます。

さて $0 < a < b < \infty$ なる a, b を取ります。まず $t \in (a, b)$ であるものを考えましょう。先の偏導関数の絶対値を t によらないある可積分関数で上から押さえたいです。 $t \in (a, b)$ なので $-tx \leq -ax$ ですから $\exp(-tx) \leq \exp(-ax)$ が言えて、 $|\sin x| \leq 1$ も使うと

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = \exp(-tx) |\sin x| \leq \exp(-ax)$$

が導けます。最右辺は $x \in [0, \infty]$ で可積分で t に依存していません。それゆえ $t \in (a, b)$ では微分と積分を交換できて、

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx = - \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin x dx$$

が言えます。この式は $t \in (a, b)$ で成り立ちますが、 a は任意に 0 に近く取れますし、 b は任意に大きく取れますので、全ての $t > 0$ でこの式が成り立ちます。

(2). 部分積分を三角関数の方に対して使うと、次のように変形出来ます.

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= \int_0^\infty \exp(-tx) \frac{d \cos x}{dx} dx \\
 &= \left[\exp(-tx) \cos x \right]_0^\infty - \int_0^\infty (-t \exp(-tx)) \cos x dx \\
 &= -1 + t \int_0^\infty \exp(-tx) \frac{d \sin x}{dx} dx \\
 &= -1 + t \left(\left[\exp(-tx) \sin x \right]_0^\infty - \int_0^\infty (-t \exp(-tx)) \sin x dx \right) \\
 &= -1 - t^2 F'(t).
 \end{aligned}$$

(3). 各 $x > 0$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-tx) = 0$ となります. $M := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| < \infty$ とおきます. t が 1 より大であれば, $\left| \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} \right| \leq M \exp(-x)$ が成り立ち, 右辺は t によらない x の可積分関数です. よって $t \rightarrow \infty$ に対して Lebesgue の収束定理を使えて,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-tx) \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

(4). (2) より $F'(t) = -(1+t^2)^{-1}$ なので, ある定数 C があって $F(t) = -\text{Arctan } t + C$ となりますが, $t \rightarrow \infty$ としてみると左辺は (3) の結果から 0 に収束し, 右辺は $-\pi/2 + C$ に収束するので $C = \pi/2$ です. よって $F(t) = -\text{Arctan } t + \pi/2$ と求められます.

♠ ちなみに $F(t) = -\text{Arctan } t + \pi/2$ は今のところ $t > 0$ でなりたっていますが, もう少しがんばると, 実は $t = 0$ でも成立することを示せます. つまり有名な公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

を示せます. この最後の等式だけは広義 Riemann 積分であり, Lebesgue 積分とは考えられないことに注意してください. 実際 $\sin x/x$ は $[0, \infty]$ 上で広義 Riemann 可積分ですが, Lebesgue 可積分ではないというよく知られた例です.