

注意: 解答用紙に, 氏名, 学籍番号, 問題番号とその解答を記入し解答用紙のみ提出してください.

問題 1 (5 点) 次の (1) から (4) のうち, 可算無限集合 ($\mathbb{N}$ との全単射を構成できる集合) をすべて選べ: (1) $\mathbb{Q}$ (2) $\{\tan x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Z}\pi\}$ (3) $\{(x, \tan x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}\pi\}$ (4) $\mathbb{R}$.

問題 2 (5 点) 次の (1) から (4) のうち, $\mathbb{R}^2$ の閉集合を選べ ($\mathbb{R}^2$ の位相はユークリッド距離から決まる距離位相).

(1) $\mathbb{Z}^2$ (2) $\mathbb{Q}^2$ (3) $\{(x, \tan x) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \pi/2\}$ (4) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \times \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

問題 3 (5 点) 集合 X の部分集合 A と B に対して, それらの定義関数をそれぞれ $1_A, 1_B$ と書く. このとき, 等式 $1_A + 1_B = 1_{A \setminus B} + 1_{B \setminus A} + 2 \cdot 1_{A \cap B}$ を示せ.

問題 4 (10 点) 集合 X に σ -field $\mathcal{B}$ が与えられているとする. 部分集合 $Y \subset X$ に対して, 集合族 $\mathcal{B}_Y \subset 2^Y$ を $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ とおく. このとき $\mathcal{B}_Y$ は Y の σ -field であることを示せ.

問題 5 (各 5 点) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする. 集合列 $A_n \in \mathcal{B}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ を満たしているとする. 上極限を $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ と定める. このとき $\mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ が成り立つことを次で示せ (これを Borel-Canteli の補題という).

(1) $B_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ とおくと, $B_k \in \mathcal{B}$ かつ $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ がなりたつことを示せ.

(2) $\mu(B_1) < \infty$ を示せ.

(3) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{B}$ かつ $\mu\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ を示せ.

以下の問題では, 各種収束定理や微分と積分の交換定理などを使う場合は, なぜそれらが適用可能なの理由を明確に記入すること. また, 公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は証明なしに用いてもよい.

問題 6 (20 点) 次の極限を求めよ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \exp\left(\frac{ix}{n}\right) dx$.

問題 7 (20 点) 自然数 n と実数 $x \in [0, 1]$ に対して, $f_n(x)$ を次で定める. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ を求めよ.

$$f_n(x) := \begin{cases} +\infty & \text{if } x = 0, \\ \int_{-\infty}^n e^{-xy^2} dy & \text{if } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

問題 8 (各 5 点) 実数 $t \in \mathbb{R}$ で $t > 0$ をみたすものに対して, $F(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) $F'(t) = -\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin(x) dx$ を示せ.

(2) (1) で部分積分を 2 回行い, $F'(t) = -1 - t^2 F'(t)$ を示せ.

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$ を示せ.

(4) $F(t) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } t$ を示せ.