

サンプル 2 の略解と解説

問題 1: (2).

解説: まず $\mathbb{R}$ は非可算集合であることを思い出しましょう. (1) は $\mathbb{R}$ から可算無限集合 $\mathbb{Q}$ を取り除いた集合 (無理数たち) なので非可算です. (2) は可算無限集合の有限個の直積なので, 可算無限集合です. (3) は見た目から一瞬可算かなと思うかもしれませんが, 非可算集合です. 実際, 写像 $f: \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\} \rightarrow [0, 1]$ を $f((a_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/2^n$ で定めると, f は全射であることが分かります (2 進展開). よって集合 $\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ の濃度は区間 $[0, 1]$ の濃度よりも大ですが, 区間 $[0, 1]$ は $\mathbb{R}$ と同じ濃度をもつ非可算集合ですから, (3) の集合も非可算となります. (4) の $\mathbb{C}$ は非可算集合 $\mathbb{R}$ を部分集合として含みますから非可算です.

問題 2: (1), (3).

解説: $A \subset \mathbb{R}^N$ が開集合であるとは, 各 $z \in A$ において適当に小さい $\varepsilon > 0$ を選ぶと, ε -開球 $B(z, \varepsilon) := \{z' \in \mathbb{R}^N \mid \|z' - z\| < \varepsilon\}$ がすっぽり A に含まれることを言います. ですからある点 $z \in A$ では, どんなに小さく $\varepsilon > 0$ を選んできても $B(z, \varepsilon)$ が A からはみ出してしまうようなら, A は開集合ではないわけです. (1) と (3) は各点 $z = (x, y)$ において小さい $\varepsilon > 0$ で $B(z, \varepsilon)$ がそれらの集合に入るようにできることは, 図に書いてみると分かります. (2) の集合では, たとえば点 $z = (1, 0)$ において $B(z, \varepsilon)$ を考えると, どんなに $\varepsilon > 0$ を小さく取ってもこの開球が実軸より上や下にはみ出てしまいます. よって開集合ではありません. (4) の集合は 1 点からなる集合 $\{(0, 0)\}$ と等しいので開集合ではありません.

問題 3: 集合 $A \cup B$ の互いに素な集合による分解 $A \cup B = A + B \setminus A$ を使えばサンプル 1 の問題 3 と同じように出来ます.

問題 4: 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が Borel 可測であるとは, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して集合 $E(f < a) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < a\}$ が Borel 集合であるということです. この条件をチェックしましょう. 実数 $a \in \mathbb{R}$ をとってきます. f が単調増加なので, $x < y$ で $y \in E(f < a)$ なら $x \in E(f < a)$ であること, つまり $(-\infty, y] \subset E(f < a)$ であることに注意しましょう. こうなる y の限界が気になるので, $\sup E(f < a) = \infty$ の時と $\sup E(f < a) < \infty$ の時に場合分けして考えます. この上限が ∞ の場合は, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \subset E(f < a)$ なので $E(f < a) = \mathbb{R}$ となり, これは Borel 集合です. さっきの上限が有限のとき, これを s と書きましょう. 上限なので $f(s) < a$ かどうかは, f の性質 (連続性など) を知らないと分かりませんが, とにかく $f(s) < a$ か $f(s) \geq a$ です. もし $f(s) < a$ なら, $E(f < a) = (-\infty, s]$ であり, もし $f(s) \geq a$ なら, $E(f < a) = (-\infty, s)$ であることが少し考えると分かります. これらはどちらにせよ Borel 集合です. 以上の考察をまとめて, f は Borel 可測であることが言えました.

問題 5: (1). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とします. 問題 4 で使った集合 $E(f < a)$ が, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して Borel 集合であることを示します. この集合は $f^{-1}((-\infty, a))$ と書けます. $(-\infty, a)$ は開集合であるため, $f^{-1}((-\infty, a))$ も f の連続性から開集合です. 開集合は Borel 集合なので, f は Borel 可測となります.

(2). 集合 $N := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ を定めると, これは開集合であり, $N \neq \emptyset$ と仮定すると, ある点 $x \in N$ と $\varepsilon > 0$ が, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset N$ をみたすように取れます. 一方 (2) の仮定から $\mu_o(N) = 0$ となります. 測度の単調性から $2\varepsilon = \mu_o((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) \leq \mu_o(N)$ が言えるので, $\varepsilon = 0$ となり矛盾します. よって $N = \emptyset$, つまり $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ が従います.

問題 6: まず次を思い出しましょう.

定理 (Fatou の補題) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間, $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ を可測関数列とすると, 次の不等式が

成り立つ.

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

右辺が本当に左辺より大きくなる例を作れということです. 例えば, $X = \mathbb{R}$ に Lebesgue 測度 μ を与えて, $f_n(x) = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ と定めます. すると $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ となります. 一方 f_n の $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度での積分は ∞ に等しいので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = 0 < \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n d\mu$$

となり等号が成立しません.

他の例として, $X = [0, 1]$ に Lebesgue 測度 μ を与えて, $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定めます.

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n - 2n^2x & \text{for } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{for } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

すると $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ となります. ここで極限の関数 f は次のようになります.

$$f(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x = 0 \\ 0 & \text{for } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

特に $f = 0$ μ -a.e. です. 一方 $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ なので,

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n d\mu$$

となり, こちらも等式が成り立ちません.

問題 7: (1). $y = \sin \varphi$ のグラフを $|\varphi| \leq \pi/2$ の範囲で書きます. 次に原点と $(\pi/2, 1)$ を通る直線 $y = 2\varphi/\pi$ を引きましょう. 負のところを x 軸に関して折り返してみれば, $|\sin \varphi| \geq 2|\varphi|/\pi$ であることは一目瞭然でしょう.

(2). Lebesgue の収束定理を使う問題です. 積分区間 $[-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2]$ が大きくなっていくので, ちょっと面倒くさそうです. ここはこの区間で $\mathbb{R}$ を切る定義関数 $1_{[-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2]}$ を考えて, 次のように変形しましょう.

$$\int_{-\sqrt{n}\pi/2}^{\sqrt{n}\pi/2} \exp\left(-n \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-n \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) 1_{[-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2]}(x) dx.$$

そこで $f_n(x) := \exp\left(-n \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) 1_{[-\sqrt{n}\pi/2, \sqrt{n}\pi/2]}(x)$ とおきます. $n \rightarrow \infty$ とすれば, 公式 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta / \theta = 1$ を使うことにより, $f_n(x) \rightarrow \exp(-x^2)$ となることが分かります.

Lebesgue の収束定理を使うためには $|f_n|$ (今は $f_n \geq 0$ なので $|f_n| = f_n$ ですが) を上から抑えるように n に関係ない可積分関数をとれることを言わなければなりません. もし $|x| \leq \sqrt{n}\pi/2$ ならば, $|x/\sqrt{n}| \leq \pi/2$ なので (1) より $|\sin(x/\sqrt{n})| \geq 2|x|/(\sqrt{n}\pi)$ が言えます. よって次が言えます.

$$f_n(x) = \exp\left(-n \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)$$

これは $|x| \leq \sqrt{n}\pi/2$ をみたす x について言えたのですが, $|x| > \sqrt{n}\pi/2$ となる x については, $f_n(x) = 0$ なのでやはり同じ不等式が言えています. つまり $f_n(x) \leq \exp(-4x^2/\pi^2)$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ で成り立ちます. 右辺は n に関係のない可積分関数ですから, Lebesgue の収束定理を f_n の積分に対して使えて, 次のように極限を求められます.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{n}\pi/2}^{\sqrt{n}\pi/2} \exp\left(-n \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

問題 8: パラメータ付きの積分の問題です. (1). $f(x, a) := \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)$ とおきます (a の微分だけ考えるので, b は定数とみなせるので変数に入れませんでした, $f(x, a, b)$ と書いてももちろん O.K. です). まずこれが a で偏微分をもつことはよいでしょう. 計算すると,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a \cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

となります. 微分と積分の交換定理を使いたいの, $\left| \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) \right|$ を上から抑えるように a に関係ない可積分関数を取れることを示します. まず a が開区間 (α, β) を動くとしましょう. すると簡単な評価方法で,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a \cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \leq \frac{2\beta \cos^2 x}{\alpha^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

が言えます. 右辺は発散しない x の連続関数ですから $[0, \pi/2]$ 上可積分であり, a を変数にもちません. したがって微分と積分の交換定理を使うことができ, $F(a, b)$ は a で偏微分可能であり,

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial f}{\partial a} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2a \cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

となります.

(2). $t = \tan x$ なので, $dt = \frac{d \tan x}{dx} dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + t^2) dx$ となります. 積分範囲は $[0, \infty)$ となり,

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{2a}{(a^2 + b^2 t^2)(1 + t^2)} dx$$

と変形できます. あとは公式 $\int_0^\infty dt/(1 + t^2) = \pi/2$ を使うべく, 部分分数展開などの標準的な術を使っていけば, 積分を求められます.

(3). $a = b$ なら, $a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x = a^2$ なので, 簡単です.

(4). (2) の偏微分方程式から, $F(a, b) = \pi \log(a + b) + g(b)$ と書けます. ここで, $g(b)$ は a を変数に持たない, b についての関数です (あとで定数であることが分かりますが). $a = b$ なら, (3) より $F(b, b) = \pi \log b$ でした. 一方 $F(b, b) = \pi \log(2b) + g(b)$ なので, $g(b) = -\pi \log 2$ と求まります. よって, $F(a, b) = \pi \log((a + b)/2)$ となります.