

問題 1 (5 点) 次の (1) から (4) のうち, 可算無限集合 ($\mathbb{N}$ との全単射を構成できる集合) をすべて選

べ: (1) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ (3) $\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ (4) $\mathbb{C}$.

問題 2 (5 点) 次の (1) から (4) のうち, $\mathbb{R}^2$ の開集合を選べ ($\mathbb{R}^2$ の位相は通常の位相):

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ (2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 0\}$ (3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \sin x\}$
 (4) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

問題 3 (5 点) 集合 X の部分集合 A と B に対して, それらの定義関数をそれぞれ $1_A, 1_B$ と書く. このとき, 等式 $1_{A \cup B} = 1_A + 1_{B \setminus A}$ を示せ.

問題 4 (10 点) $\mathbb{R}$ に左半開区間から生成される σ -field $\mathcal{B}$ を与える. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が (広義) 単調増加であれば, f は Borel 可測であることを示せ.

問題 5 ((1):5 点, (2):10 点) 前問と同じ $\mathcal{B}$ を考え, $\mu_o: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ を Lebesgue 測度とする. 次の問に答えよ.

- (1) $\mathbb{R}$ 上の連続関数は Borel 可測であることを示せ.
- (2) 関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. もし $f(x) = g(x)$ μ_o -a.e. x であれば, 全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = g(x)$ であることを示せ.

問題 6 (15 点) Fatou の補題の等式が成り立たない例を構成せよ.

以下の問題では, 各種収束定理や微分と積分の交換定理などを使う場合は, なぜそれらが適用可能なのか理由を明確に記入すること. また, 公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は証明なしに用いてもよい.

問題 7 ((1):5 点, (2):20 点) 次の問に答えよ.

- (1) $|\varphi| \leq \pi/2$ なる実数 φ に対して, 不等式 $|\sin \varphi| \geq 2|\varphi|/\pi$ が成り立つことを示せ.
- (2) 次の極限を求めよ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{n}\pi/2}^{\sqrt{n}\pi/2} \exp\left(-n \sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) dx$.

問題 8 (各 5 点) 実数 a, b で $a, b > 0$ をみたすものに対して, 次の積分を考える:

$$F(a, b) := \int_0^{\pi/2} \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx$$

次の問に答えよ.

- (1) $\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^{\pi/2} \frac{2a \cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$ を示せ.
- (2) (1) で $t = \tan x$ と変数変換して, $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\pi}{a+b}$ を示せ.
- (3) $F(a, a) = \pi \log a$ を示せ.
- (4) $F(a, b) = \pi \log\left(\frac{a+b}{2}\right)$ を示せ.