サンプル 3 の略解と解説

問題 1: (1), (4).
解説: Cantor 集合は実数と同じ濃度をもつのでした.

問題 2: (3), (4).
解説: 明らかです.

問題 3: 任意の $x \in X$ に対して $1_A(x)$ と $\sum_n 1_{A_n}(x)$ の値が等しいことを示せばよいですが, 簡単です.

問題 4: $A := \bigcap_n A_n$ とおきます. 補集合 A^c の大きさを測ることにします. $A^c = \bigcup_n A_n^c$ ですから, 劣加法性により

$$\mu(A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^c)$$

であり, $\mu(A_n^c) = \mu(X) - \mu(A) = 1 - \mu(A) \leq 1/(n+1)(n+2)$ を使えば,

$$\mu(A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)(n+2) = 1/2.$$

従って $\mu(A) = 1 - \mu(A^c) \leq 1/2$.

問題 5: 簡単です.

問題 6: e^{inx} に関する部分積分により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{inx}\, dx = -\frac{1}{in} \int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2} e^{inx}\, dx$$

が言える. 絶対値を取って評価すると,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{inx}\, dx \right| \leq \frac{2}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx.$$

右辺の積分は発散しないことに注意しましょう. これから求めたい極限の式が従います.

問題 7: (1). $f(t)$ の方は微分と積分の基本定理から, $g(t)$ の方は微分と積分の交換定理から従います. 後の (2), (3), (4) は計算です.