問題 1 (5 点) 次の (1) から (4) のうち, 可算無限集合 ($\mathbb{N}$ との全単射を構成できる集合) をすべて選べ.

$$(1)\ \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad (3)\ \mathbb{N}\cap[0,1] \quad (2)\ \text{Cantor 集合} \quad (4)\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

問題 2 (5 点) 次の (1) から (4) のうち, $\mathbb{R}^2$ の有界集合を選べ ($\mathbb{R}^2$ にはユークリッド距離を入れる).

$$(1)\ \mathbb{Z}^2 \quad (2)\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(-1,1)\times(-1,n) \quad (3)\ [0,1]\times(0,1) \quad (4)\ \{(1/x,\sin x)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}, |x|\geq 1\}.$$

問題 3 (10 点) 集合 X の互いに素な部分集合列 $A_1, A_2\dots$ に対して, $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ とおく. 等式 $1_A=\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}$ を示せ.

問題 4 (10 点) $(X,\mathscr{B},\mu)$ を測度空間とし, $\mu(X)=1$ とする. もし $A_n\in\mathscr{B}$ $(n\in\mathbb{N})$ が, 不等式 $\mu(A_n)\geq 1-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ を満たすならば, $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\geq 1/2$ であることを示せ.

問題 5 (10 点) 2 つの Borel 可測関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の合成関数 $f\circ g$ も Borel 可測であることを示せ.

以下の問題では, 各種収束定理や微分と積分の交換定理などを使う場合は, なぜそれらが適用可能なのか理由を明確に記入すること. また, 公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ は証明なしに用いてもよい.

問題 6 (30 点) 次の極限を求めよ: $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)\exp(inx)\,dx$.

問題 7 ((1),(2):5 点, (3),(4):10 点) 実数 $t\geq 0$ に対して, 関数 $f(t)$, $g(t)$ を次で定める.

$$f(t):=\left(\int_0^t\exp(-x^2)\,dx\right)^2,\quad g(t):=\int_0^1\frac{\exp(-t^2(1+x^2))}{1+x^2}\,dx.$$

次の問に答えよ.

(1) $f'(t)+g'(t)=0$ と $f(0)+g(0)=\pi/4$ を示せ.

(2) $f(t)+g(t)=\pi/4$ を示せ.

(3) $\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ.

(4) $\int_0^{\infty}\exp(-x^2)=\sqrt{\pi}/2$ を示せ.