問題 1 (5 点) 次の (1) から (5) のうち, 可算無限集合 ($\mathbb{N}$ との全単射を構成できる集合) をすべて選べ.

(1) $\mathbb{Q}$　(2) $\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$, ($n$ は自然数)　(3) $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$, ($n$ は自然数)　(4) $\mathbb{R}$　(5) $\mathbb{C}$

問題 2 (5 点) 実数の集合 $\mathbb{R}$ に距離 $d(x,y) = |x-y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ から決まる距離位相を与える. この位相に関して, 開集合でも閉集合でもない部分集合を一つ与えよ.

問題 3 (5 点) 集合 X の部分集合 A と B に対して, それらの定義関数をそれぞれ 1_A, 1_B と書く. このとき, $1_A 1_B = 1_{A\cap B}$ であることを示せ.

問題 4 (10 点) 集合 X に σ-field の族 $\{\mathscr{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられているとする (ここで Λ は添え字の集合). このときそれらの共通部分 $\mathscr{B} := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{B}_\lambda$ も σ-field であることを示せ.

問題 5 (10 点) $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を測度空間で $\mu(X) = 1$ をみたすとする. もし $A_n \in \mathscr{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ が, $\mu(A_n) \geq 1 - 1/3^n$ を満たすならば, $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq 1/2$ であることを示せ.

以下の問題では, 各種収束定理や微分と積分の交換定理などを使う場合は, なぜそれらが適用可能なのか理由を明確に記入すること. また, 公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ は証明なしに用いてもよい.

問題 6 (10 点) $(X, \mathscr{B}, \mu)$ を測度空間, $f\colon X \to [0,\infty]$ を可積分関数とする. 各 $B \in \mathscr{B}$ に対して,

$$\nu(B) := \int_X f 1_B \, d\mu$$

とおけば, 写像 $\nu\colon \mathscr{B} \to [0,\infty]$ は測度であることを示せ.

問題 7 ((1):5 点, (2):20 点) 次を示せ.

(1) $n \geq 3$ ならば, $\cos(\pi/n) \geq 1/2$ であることを $y = \cos x$ のグラフを描いて示せ.

(2) 次の極限を求めよ: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-x^2\cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)\,dx$.

問題 8 ((1),(4):10 点, (2),(3):5 点) 実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $F(t) := \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(tx)\,dx$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) $F'(t) = -\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\sin(tx)\,dx$ を示せ.

(2) $\dfrac{de^{-x^2}}{dx}$ を計算せよ.

(3) (1) で部分積分を使って, $F'(t) = -\dfrac{t}{2}F(t)$ を示せ.

(4) $F(t) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\Big(-\dfrac{t^2}{4}\Big)$ を示せ.