問題 1 (5 点) 次の (1) から (5) のうち, 可算無限集合をすべて選べ.

$$(1)\ \mathbb{Q}, \quad (2)\ \mathbb{Z}, \quad (3)\ \mathbb{R}, \quad (4)\ \mathbb{C}, \quad (5)\ 2^{\mathbb{N}}.$$

問題 2 (5 点) $\mathbb{R}$ に絶対値から定まる距離を入れる. この位相に関して, 開集合かつ閉集合である部分集合を一つ与えよ.

以下の問題では, 各種収束定理, 微分と積分の交換定理や Fubini の定理などを使う場合は, それらが適用可能な理由を明確に記入すること. また $\mathbb{R}$ 上の積分はルベーグ測度による積分である.

問題 3 (10 点) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測関数が正値 ($f(x) \geq 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}$ でなりたつ) であるとき, 次を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 f(x)}{(1+x^2)^n}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

問題 4 (10 点) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を可積分関数とする. 次の極限の等式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$$

問題 5 (15 点) $\mathbb{R}^2$ の閉集合 $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y \leq |x| + e^{-|x|}\}$ について, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} 1_D(x,y)\, dxdy$ を求めよ.

問題 6 (15 点) 積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1_{[-1,1]}(x) 1_{[1,\infty)}(y)}{\sqrt{|x|}y^2}\, dxdy$ を求めよ.

問題 7 ((1),(2),(3):5 点, (4):10 点) 実数 $t \in (0,\infty)$ に対して, $\displaystyle F(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-x}\, dx$ とおく.

(1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $|\sin\theta| \leq |\theta|$ が成り立つことをグラフで図示して示せ.

(2) $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin(tx)}{t} = x$ を示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} F(t) = \int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$ を示し, 値を求めよ.

問題 8 ((1):5 点, (2):10 点) 0 以上の自然数の集合 $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\dots\}$ に σ-field として $2^{\mathbb{N}_0}$ を与え, 個数測度 $\nu\colon 2^{\mathbb{N}_0} \to [0,\infty]$ を $\nu(A) = |A|$ として与える. ここで $|A|$ は部分集合 A の要素の個数を表す. $\mathbb{R}$ にルベーグ測度 μ を与え, 直積空間 $X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0$ に μ と ν の直積測度 m_X を与える.

(1) 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を $\displaystyle f(t,n) := \frac{|t|^n e^{-2|t|}}{n!}$ と定める. このとき f は測度 m_X に関して可積分であることを示せ.

(2) 積分 $\displaystyle\int_X f(t,n)\, dm_X(t,n)$ を求めよ.