

1 演習の形式と成績評価の方法

この授業では線形代数学 I の演習を行います。毎回問題用紙を配り、出来た人から黒板で解いてもらいます。原則早いもの勝ちですが、何人かが競った時には発表回数の少ない人の中から選びます。各問題は今学期中有効なので、当日配られた問題の他に古い問題も解くこともできます。

成績は発表回数と発表内容 (満点 = 問題の pt 数) から評価します。単位取得の為に最低 2 回の発表と 4 回以上欠席しないこと* が必要となります。

発表の仕方：聴衆に理解してもらえるように分かりやすく 10 分くらいで発表してください。聴衆は発表されているロジックが通っているかをチェックし、不明な点があれば積極的に質問をすること。

問題は順次私の web page にアップします: <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

2 数学の記号

- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ そして $\mathbb{C}$ は各々、自然数 (0 は含まない)、有理数、実数そして複素数の集合を表す。以降文字 $\mathbb{K}$ によって、 $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を表す。
- この演習では、サイズ n の単位行列は E_n と書き、零行列は単に 0 と書く。行列は大文字で書き (A, B, C 等)、ベクトルは太文字で書く (x, y, z 等)。

3 行列

$n \geq 1$ を自然数とする。このとき、 $\mathbb{K}$ 上の $n \times n$ 行列全体のなす集合を $M_n(\mathbb{K})$ と書く：

$$M_n(\mathbb{K}) := \{A \mid A \text{ は } n \times n \text{ 行列で各要素が } \mathbb{K} \text{ の元}\}.$$

行列の空間 $M_n(\mathbb{K})$ には、加法とスカラー倍が自然に定義出来る： $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$ のとき、

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{ij}, \quad cA := (ca_{ij})_{ij}.$$

この二つの演算と零行列 0 とで、 $M_n(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる。

(i, j) 成分のみ 1, 残りは 0 という行列を E_{ij} と書く。これを行列単位という[†]。

問題 1 (1pt.) 行列単位をすべて集めたもの $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ は、ベクトル空間 $M_n(\mathbb{K})$ の基底であることを示せ。

ベクトル空間 $M_n(\mathbb{K})$ は次の乗法をもつ：

$$AB := \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{ij}$$

この乗法は加法やスカラー倍と次の意味で整合的である。

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC, \quad (cA)B = cAB = A(cB).$$

二つの行列の掛け算を考えたとき、任意の行列は行列単位たちの線形和で書けることから、行列単位どうしの掛け算のルールが分かれば、もとの二つの行列の掛け算も求められる。

* 正当な理由での欠席であれば、回数に含めませんので前もって欠席届を私のところに提出してください。

[†] これらが $M_n(\mathbb{K})$ の「最小」の構成要素であるということ

問題 2 (2pt.) $M_n(\mathbb{K})$ の行列単位 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ に対して、次が成り立つことを示せ:

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}.$$

つまり二つの行列単位を掛けると、真ん中の二つの文字が異なれば 0 になり、同じであればそれが縮約された行列単位になる。

転値行列についても復習しよう。 $A = (a_{ij})_{ij}$ を $n \times n$ 行列とすると、その転値行列を ${}^tA = (a_{ji})_{ij}$ と定める。転値行列を取ることと、行列の各種演算について次が成り立つ。

問題 3 (2pt.) $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$ とするとき、

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(cA) = c{}^tA, \quad {}^t(AB) = {}^tB{}^tA.$$

よって転値をとる写像 ${}^t: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ は加法やスカラー倍を壊さないこと、乗法に関しては順番が逆になることが分かる。

問題 4 (1pt.) 等式 ${}^tE_{ij} = E_{ji}$ を示せ。

$A \in M_n(\mathbb{K})$ の逆行列とは、 A の左と右から掛けて単位行列とすることができるものである。つまり

$$AB = E_n = BA$$

をみたす B を A の逆行列という。下の問題から逆行列は 1 つしかないので、これを A^{-1} と書く。また逆行列をもつ行列のことを正則行列という。

問題 5 (1pt.) $A \in M_n(\mathbb{K})$ は少なくとも 1 つ逆行列をもつとする。このとき実際には逆行列はちょうど 1 つしかないことを示せ。

逆行列と加法にはよい関係はないが、スカラー倍と乗法には関係があることを復習しておこう。

問題 6 (1pt.) $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ を正則行列、 $c \in \mathbb{K}$ で $c \neq 0$ とする。次を示せ。

$$(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4 行列式

全ての行列が逆行列をもつわけではないので、逆行列をもつ必要十分条件を与えることが応用上重要となる。いくつか知られている必要条件のうち、「 A が正則である $\Leftrightarrow A$ の行列式が消えない。」について学ぼう。行列式は「原理的には」計算で求めることができるので、正則かどうかを判定する有効な手段である。行列式を一般のサイズの行列に導入するには、対称群の知識が少々必要となるのでそこから始めよう。

定義 4.1 1 から n までの自然数の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を考える。 $\{1, 2, \dots, n\}$ から $\{1, 2, \dots, n\}$ の全単射な変換[‡]全体を $\mathfrak{S}_n$ と書き、 n 次の対称群という:

$$\mathfrak{S}_n := \{\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ は全単射}\}.$$

問題 7 (3pt.) $\mathfrak{S}_n$ の元の個数は $n!$ であることを示せ。

問題 8 (5pt.) $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ とする。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を取り、 i を同じ σ で変換していくと、いつかは i に戻ること示せ: つまり、ある自然数 k があって $\sigma^k(i) = i$ [¶]となることを示せ。

[‡] 上への写像で単射であるもののこと。

[§] $\mathfrak{S}$ はドイツ文字の S で symmetric group(対称群)の頭文字。

[¶] σ^k は σ の k 回の合成 $\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ のこと。