

7.2 線型写像 つづき

次に2つの $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V から W への線形写像全体のなす集合を考えよう (行列の空間 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対応).

$$L(V, W) := \{T \mid T: V \rightarrow W \text{ は線形写像}\}.$$

この集合は行列の集合に対応するのだから, 当然ベクトル空間になるはずであるが, これを確認しよう. $S, T \in L(V, W)$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, 和 $S + T$, スカラー倍 cS は次で定義する:

$$(S + T)(x) := S(x) + T(x), \quad (cS)(x) := cS(x) \text{ for all } x \in V.$$

問題 172 (2pt.) $L(V, W)$ に上のように足し算とスカラー倍の演算を入れる. 0 ベクトルを問題 158 のもの, つまり $0: V \rightarrow W$ を $0(x) = \mathbf{0}$ とすると, $L(V, W)$ はベクトル空間となることを示せ.

7.3 線形写像の核と像

線形写像 $T: V \rightarrow W$ を引き続き考えよう. No.2 と 3 でやったように $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ を導入する (この2つの集合が後で活躍する).

定義 7.1 (線形写像の核と像) V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, $T: V \rightarrow W$ を線形写像とする.

- V の部分集合 $\ker(T)$ を次で定め, T の**核** (カーネル, kernel) とよぶ.

$$\ker(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}.$$

- W の部分集合 $\text{Im}(T)$ を次で定め, T の**像** (イメージ, image) とよぶ.

$$\text{Im}(T) = \{T(x) \mid x \in V\}.$$

問題 173 (1pt.) 問題 158 で $\ker(T)$ と $\text{Im}(T)$ を求めよ.

問題 174 (2pt.) 問題 159 で $f \neq 0$ とする. このとき $\ker(T_f) = \{0\}$ を示せ.

問題 175 (1pt.) 問題 160 で $\ker(\delta_x)$ を求めよ. また $\text{Im}(\delta_x) = \mathbb{R}$ を示せ.

問題 176 (2pt.) 問題 161 で, $\ker(T) = \{0\}$ を示せ. また $C_0^1(\mathbb{R}) := \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ と定めると $\text{Im}(T) = C_0^1(\mathbb{R})$ であることを示せ.

問題 177 (2pt.) 問題 162 で, $\ker(I) = \{0\}$, $\text{Im}(I) = C(\mathbb{R})$ を示せ.

問題 178 (2pt.) 問題 163 で, $\ker(d/dx) = \{\text{定数関数たち}\}$, $\text{Im}(d/dx) = C(\mathbb{R})$ であることを示せ.

問題 179 (2pt.) 問題 164 で, $\ker(\sigma) = \{0\}$, $\text{Im}(\sigma) = V$ であることを示せ.

問題 180 (2pt.) 問題 165 で, $\ker(\tau) = \{0\}$, $\text{Im}(\tau) = \{(a_n)_n \in V \mid a_1 = 0\}$ であることを示せ.

*<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

7.4 ベクトル空間の部分空間

定義から明らかに $\ker(T) \subset V$, $\text{Im}(T) \subset W$ である. しかし線形写像の核と像はただの部分集合ではない (問題 17 参照). 実はこれらもベクトル空間なのである. 一般にあるベクトル空間 (大きい方) の中に, ベクトル空間 (小さい方) が入っているとき, 小さい方を大きい方の部分空間という. ちゃんと書くと次のようになる (定義 0.4 参照).

定義 7.2 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が**部分空間** (subspace) とは, 次をみたすときにいう.

- W は和で閉じる, すなわち, もし $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ がいえる.
- W はスカラー倍で閉じる, すなわち, もし $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in W$ ならば, $a\mathbf{x} \in W$ がいえる.

$\mathbb{R}^n$ の中の部分空間になるものや, 部分空間にならない例は問題 18 参照のこと. まず次の結果は明らかであるが, 大事なので問題としよう.

問題 181 (1pt.) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, W を V の部分空間とすると, V の 0 ベクトル $\mathbf{0}$ は W にも入ることを示せ.

問題 182 (1pt.) W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の部分空間とする. このとき W は V の演算 (足し算とスカラー倍) と 0 ベクトルとで, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ.

問題 183 (1pt.) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{v}$ をとってくる. これに直交するベクトルたちの空間 $W := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{v}\}$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間となることを示せ.

問題 184 (1pt.) 問題 151 の $\mathbb{R}[x]$ を考える. 自然数 n に対して $\mathbb{R}_n[x] := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq n\}$ とおくと, $\mathbb{R}_n[x]$ は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間となることを示せ.

問題 185 (1pt.) 問題 153 の $C(\mathbb{R})$ を考える. すると $C_e(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ は偶関数}\}$ は $C(\mathbb{R})$ の部分空間となることを示せ.

次の 2 つの結果は基本的である. 線形性が効いてくることを実感しよう.

問題 186 (1pt.) $T: V \rightarrow W$ を線形写像とすると, $\ker(T)$ は V の部分空間である.

問題 187 (1pt.) $T: V \rightarrow W$ を線形写像とすると, $\text{Im}(T)$ は W の部分空間である.

次は問題 16 そのものであるが, とても大事なのでもう一度やる.

問題 188 (1pt.) 線形写像 $T: V \rightarrow W$ が単射 $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$ を示せ.

8 ベクトル空間の次元

8.1 次元の有限・無限性

このセクションでは §0.2 の続きを厳密にやるので, もう一度眺めておくとよい. 数学では 2 つの対象を区別することをよく考える. 集合 $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ は「異なる」のかとか, こっちの三角形とあっちの三角形は「同じ」なのかという風にである[†]. したがってベクトル空間が 2 つあったとき, それらを区別したいのだがどうすればよいのだろう. たとえば $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ を考える. これらが「ベクトル空間として同じ」[‡]なのは, おそらく $\mathbb{R}$ の右肩についた数 n, m が等しいときではないかと考えられる. たとえば

[†]もちろん「同じ」, 「異なる」の意味をあらかじめ決めなくてはならない. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ はベクトル空間としては異なるが, 濃度で比べるならば同じである.

[‡]後で正確な定義はやるが, ベクトル空間として「同型」という.

$\mathbb{R}^1$ と $\mathbb{R}^2$ では、一方は直線をイメージするしもう一方は平面をイメージするからである。 $\mathbb{R}^n$ の n は「空間の広がり具合」を測る数(すでに次元と呼んでいた)であり、 n が増えるほどベクトルの向き方の自由度が増す。そして実際この数が $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \dots$ を見分けることを可能にする(後で証明する)。この数を $\mathbb{R}^n$ とは限らないベクトル空間に対しても定めたい。§0.2 で解説したように、この n を理解する方法として基底の概念を考えるのはとても自然なことである。まずベクトルたちの一次結合について学ぼう。

定義 8.1 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。

- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ を V の (0 ベクトルでもよい) k 個のベクトルとする。スカラーたち $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ を用意してそれぞれ掛けて足し上げて新しいベクトル $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_k\mathbf{x}_k$ を作ることができる。こうして作ったベクトルを $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ の**一次結合**[§]と呼ぶ。
- もしもある k 個のベクトルたち $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ によって、 V の全てのベクトルを一次結合で表すことができるとき、 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ は V を**張る** (span) という。

次の問題でベクトル空間を張るという気分を味わおう。

問題 189 (各 1pt.) 次の (1-5) のベクトルたちは、 $\mathbb{R}^2$ を張っているかをそれぞれ確かめよ (絵で状況を理解して厳密に証明すること)。

$$(1). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3). \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

行列の空間でもやってみよう。

問題 190 (各 1pt.) 次の (1-4) のベクトルたちは、行列の空間 $M_2(\mathbb{R})$ を張っているかどうかをそれぞれ確かめよ。

$$(1). \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}, \quad (2). \{E_{11}, E_{12}, E_{21} + E_{22}\}, \quad (3). \{E_{11}, E_{12}, E_{21} + E_{22}, E_{21} - E_{22}\}.$$

次元を定める前にまず有限次元性を定義する。

定義 8.2 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。

- V が**有限次元** (finite dimensional) であるとは、ある有限個のベクトルたちが V を張ることである。
- V が有限次元でないとき、**無限次元** (infinite dimensional) であるという。

No.9 でベクトル空間の例をいろいろとあげたので、それらが有限次元かどうかを判別してみよう。

問題 191 (各 1pt.) 問題 149, 150 のベクトル空間は有限次元であることを示せ。

問題 192 (2pt.) 問題 151 のベクトル空間は無限次元であることを示せ。

問題 193 (2pt.) 問題 152 のベクトル空間が有限次元であることと、集合 X が有限集合であることが同値であることを示せ。

問題 194 (各 2pt.) 問題 153, 154 のベクトル空間は無限次元であることを示せ。

問題 195 (2pt.) 問題 155 のベクトル空間は無限次元であることを示せ。

問題 196 (2pt.) 問題 156 において、 $k = 2$, $a_0(x) = 1 = a_1(x)$ のとき解の空間 V は有限次元であることを示せ。

[§]線形結合 (linear combination) ともいう。

8.2 基底

さて定義 0.1 で定めた $\mathbb{R}^n$ の基底の概念をベクトル空間に一般化しよう.

定義 8.3 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする.

- k 個のベクトルたち $\{x_1, \dots, x_k\}$ が**一次独立**[¶]であるとは, スカラーたち $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ についての方程式 $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0$ の解が, $a_1 = \dots = a_k = 0$ のみであることをいう. また, 一次独立でないことを**一次従属**^{||}であるという.
- k 個のベクトルたち $\{x_1, \dots, x_k\}$ が V の**基底** (base) であるとは, それらが一次独立かつ V を張ることをいう.

次の問題は明らかだが, 注意しておく.

問題 197 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の一次独立なベクトルたち $\{x_1, \dots, x_k\}$ をとると, それはいずれも 0 ベクトルではないことを示せ.

$\mathbb{R}^n$ のベクトルたちについては問題 9, 10 参照のこと.

問題 198 (1pt.) 問題 151 で, k を自然数として $\mathbb{R}[x]$ のベクトルたち $\{1, x, \dots, x^k\}$ は一次独立であることを示せ.

問題 199 (1pt.) 問題 152 で, 点 $x \in X$ に対して関数 $\delta_x \in F(X)$ を次で定める:

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{if } y = x, \\ 0 & \text{if } y \neq x \end{cases}.$$

今 X の k 個の異なる点 $p_1, \dots, p_k$ をとれば, $F(X)$ のベクトルたち $\{\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_k}\}$ は一次独立であることを示せ.

問題 200 (1pt.) 問題 153 で, $C(\mathbb{R})$ のベクトルたち $\{\sin x, \cos x\}$ は一次独立であることを示せ.

問題 201 (1pt.) 問題 153 で, $C(\mathbb{R})$ のベクトルたち $\{1, \cos(2x), \cos^2 x\}$ は一次従属であることを示せ.

問題 202 (1pt.) 問題 153 で, $C(\mathbb{R})$ の k 個のベクトルたち $\{\cos(jx) \mid 1 \leq j \leq k\}$ は一次独立であることを示せ.

問題 203 (1pt.) $C(\mathbb{R})$ で, 一次独立な k 個のベクトルたち $\{f_1, \dots, f_k\}$ が与えられているとする. 今問題 154 のベクトル空間 $C^1(\mathbb{R})$ のベクトル g_j を

$$g_j(x) := \int_0^x f_j(t) dt, \quad 1 \leq j \leq k$$

と定めると, $C^1(\mathbb{R})$ のベクトルたち $\{g_1, \dots, g_k\}$ は一次独立であることを示せ.

問題 204 (1pt.) 問題 155 において, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対してベクトル $\delta_j \in V$ を次で定める.

$$\delta_j = (0, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots).$$

このとき k 個のベクトルたち $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\}$ は一次独立であることを示せ.

問題 205 (1pt.) 問題 184 の $\mathbb{R}_n[x]$ の基底を 1 つあげよ. 基底を構成するベクトルはいくつあるか.

[¶]線形独立 (linearly independent) ともいう.

^{||}線形従属 (linearly dependent) ともいう.