線形代数学 I 演習 No.11

12 月 16 日配布
担当：戸松 玲治*

8.2 基底 つづき

問題 206 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ (k は自然数) が存在するとする．すると V の任意のベクトルは基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ の線形和として一意的に表せることを示せ．つまり各 $\boldsymbol{x} \in V$ はそれらの線形和で書け, なおかつ次のように二通りに表されているならば

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k = c_1'\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k'\boldsymbol{x}_k, \quad c_1, \dots, c_k, c_1', \dots, c_k' \in \mathbb{R},$$

$c_1 = c_1', \dots, c_k = c_k'$ が成り立つ．

前回次元の有限 (無限) 性と基底の概念を導入した．まず両者の関係について調べる．

問題 207 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k\}$ (k は自然数) が存在すれば, V は有限次元である．

線型代数学で扱うのは有限次元なので, これからはこの演習ではいちいち断らなくても**ベクトル空間は有限次元と約束する** (ときどき無限次元もやる)．

定理 8.4 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．もしも V が有限次元ならば, 次が成り立つ．

- 基底は存在する．
- 基底を構成するベクトルの個数は, 基底の取り方によらない． この個数を V の**次元**とよび, $\dim(V)$ とか $\dim V$ と書く†．

証明にはいろいろな方法があるので各自理解しておくこと．次元を求める問題をやってみよう．

問題 208 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の次元を求めよ．

問題 209 (1pt.) $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の次元を求めよ．

問題 210 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}$ の次元を求めよ．

問題 211 (1pt.) $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{7} := \{p + q\sqrt{7} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ の次元を求めよ．

問題 212 (2pt.) n を自然数とする．$\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{n} := \{p + q\sqrt{n} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ の次元を求めよ．

問題 213 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ の次元を求めよ．

問題 214 (1pt.) 問題 184 で, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}_n[x]$ の次元を求めよ．

問題 215 (2pt.) 集合 $W := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ 漸化式 $x_{n+1} = x_n$をみたす $\}$ にベクトル空間の構造を問題 155 のように入れる．$\dim W$ を求めよ．

問題 216 (2pt.) 集合 $W := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ 漸化式 $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$をみたす $\}$ にベクトル空間の構造を問題 155 のように入れる．$\dim W$ を求めよ．

問題 217 (1pt.) V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．もし $V \subset W$ かつ $\dim V = \dim W$ ならば, $V = W$ であることを示せ．

*http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html
†係数体をはっきりさせたいときは, $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ とか $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ と書く．

8.3　線型写像のランク

以前行列のランクの計算をやったが, ランクの本来の定義を学ぼう.

定義 8.5 V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, $T\colon V \to W$ を線型写像とする. このとき $\mathrm{Im}(T)$ は W の部分空間である (問題 187). その次元 $\dim \mathrm{Im}(T)$ を T の**ランク** (rank, 階数) とよび, $\mathrm{rank}(T)$ と書く.

行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ は自然に線型写像 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ であるので (§7.2 問題 157 参照), 基本変形で求めるランクと上で定めた像の次元であるランクとの 2 つが考えられるが, それらは実は等しいことを示そう. 問題 219 までは $\mathrm{rank}(A)$ は基本変形によるランクを表し, 像の次元はそのまま $\dim \mathrm{Im}(A)$ と書くことにする.

問題 218 (各 1pt.) 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ をとる. $P \in M_m(\mathbb{R})$ と $Q \in M_n(\mathbb{R})$ はどちらも正則であるとする. このとき次を示せ.

$$(1).\ \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(PAQ). \quad (2).\ \dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(PAQ).$$

問題 219 (1pt.) 定理 6.1 と問題 218 を使って, 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して次の公式を示せ.

▍「行列のランク＝像の次元」　$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

この公式の応用例を学ぶ. k 個のベクトルたち (一次独立でなくてもよい) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して次の部分集合を考える.

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) := \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

問題 220 (1pt.) $\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ.

$\mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ **が張る部分空間**とか生成する部分空間とよぶ. よくある問題はこの空間の次元を求めるものである. 次元の定義からすると基底を取ってこなくてはならないし一瞬大変そうだと思われるが, 実は次のように行列の話にもってくると計算で分かってしまう (問題 222).

問題 221 (1pt.) k 個のベクトルたち $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して, $n \times k$ 行列 A を次のように定める.

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_k).$$

このとき次を示せ.

$$\mathrm{Im}(A) = \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k).$$

問題 219 より次が分かる.

問題 222 (1pt.) k 個のベクトルたち $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して, 行列 A を問題 221 のように定めると, 次が成り立つことを示せ.

$$\dim \mathbf{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \mathrm{rank}(A).$$

練習してみよう.

問題 223 (各 1pt.) 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルたちが張る部分空間 W の次元を求めよ.

$$(1).\ \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\\4\end{pmatrix}\right\},\ (2).\ \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\2\end{pmatrix}\right\},\ (3).\ \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

ここで定義 0.1 の直後の話をもう 1 回読んでみよう. 具体的に与えられたベクトルたちが一次独立かどうかの判定には次がしばしば便利である.

問題 224 (1pt.) k 個のベクトルたち (一次独立でなくてもよい) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して, 行列 A を問題 221 のように定めると, 次が成り立つことを示せ.

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\} \text{ が一次独立} \iff \operatorname{rank}(A) = k.$$

問題 225 (各 1pt.) 問題 9(1-4) をランクの計算をして判定せよ.

問題 226 (各 1pt.) 問題 10(1-3) をランクの計算をして判定せよ.

問題 227 (各 1pt.) 問題 19(1-3) をランクの計算をして判定せよ.

次に線型写像の核の次元を求めよう. $T\colon V \to W$ を線型写像とする. 核とは次の空間であった (§7.3 定義 7.1).

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = 0\}.$$

この次元を知りたい場合二通りやり方がある. 一つは連立方程式を解いて基底を決定する方法であり, $\ker(T)$ を記述したいときにはやらなければいけない方法であるが, 次元の値だけ知りたい場合これでは面倒である. 実は $\dim\ker(T)$ は $\dim(V) - \operatorname{rank}(T)$ に等しい (問題 229. 問題 20 の後の文も参照).

問題 228 (1pt.) $\operatorname{Im}(T)$ の次元を r と書く (つまり $\operatorname{rank}(T) = r$). $\operatorname{Im}(T)$ の基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ を取る. $\boldsymbol{w}_i = T(\boldsymbol{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ となる $\boldsymbol{v}_i \in V$ を取ると, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ は一次独立であることを示せ.

つまり T で送った先が一次独立 (問題では基底としているが, 一次独立に置き換えても成り立つ) なら, 送る前のも一次独立ということである. さて $\dim(V) = n$ と書こう. 問題 228 によって $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ は V の一次独立なベクトルたちであるから, $r \leq \dim(V)$ であり, 新しいベクトルを補充して V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}\}$ が得られる. $\dim\ker(T) = n - r$ を示すために, $T(\boldsymbol{x}_i) = 0$ になったらいいなと思うことが大事である. これはもちろん一般には誤りだが, ベクトルを次のように取り替えれば正しいことが分かる. まず $T(\boldsymbol{x}_i)$ は像 $\operatorname{Im}(T)$ のベクトルであるから, 基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ の (一意的に) 線形和で書ける.

$$T(\boldsymbol{x}_i) = a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + a_{2i}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{ri}\boldsymbol{w}_r,$$

ここで係数 $\{a_{1i}, \ldots, a_{ri}\}$ を使って $\boldsymbol{y}_i \in V$ を次で定める.

$$\boldsymbol{y}_i := \boldsymbol{x}_i - (a_{1i}\boldsymbol{v}_1 + a_{2i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{ri}\boldsymbol{v}_r).$$

問題 229 (2pt.) 上の状況において,

(1) $T(\boldsymbol{y}_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n - r$ を示せ.

(2) $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-r}\}$ は $\ker(T)$ の基底であることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-r}\}$ は V の基底であることを示せ.

上の問題の (2) から, 次の公式を証明できた.

「$\ker(T)$ の次元と $\operatorname{rank}(T)$ の関係」 $\quad \dim(V) = \dim\ker(T) + \operatorname{rank}(T).$

T は V から W への線形写像であったが, 公式には像 $\operatorname{Im}(T)$ が入っている空間 W の次元 $\dim(W)$ は現れないことを注意しよう. この公式から $\dim(V)$, $\dim(\ker(T))$, $\operatorname{rank}(T)$ のうち二つが分かっていれば, 残りの一つを求められる. 後々行列の固有空間や対角化可能性を調べるときにこの公式が効いてくる. ちょっと問題をやってみよう.

問題 230 (各 1pt.) 問題 21(1-3) の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ について, 表現行列のランクを求めて $\dim\ker(f)$ を求めよ.

問題 231 (各 1pt.) 問題 22(1-3) の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ について, 表現行列のランクを求めて $\dim\ker(f)$ を求めよ.

表現行列については後で話をするが, 線形写像を行列とみなすことである (No.3 参照). またさっきも注意したが, $\dim\ker(T)$ が分かっても, $\ker(T)$ に具体的にどんなベクトルが入っているかまでは分からない (問題 23 参照). さて上の公式の応用で次も分かる.

問題 232 (各 1pt.) V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし, $T\colon V \to W$ を線形写像であるとする.

(1) T が単射 $\iff \dim\ker(T) = 0 \iff \mathrm{rank}(T) = \dim V$.

(2) T が全射 $\iff \mathrm{rank}(T) = \dim W$.

上の問題の (3) から特に次の定理が従う.

問題 233 (1pt.) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間, $T\colon V \to V$ を線形写像とする. このとき次を示せ.

$$T \text{ は単射} \iff T \text{ は全射} \iff \mathrm{rank}(T) = \dim V.$$

つまり同じ空間 V の線形写像 $T\colon V \to V$ は単射か全射であれば実は全単射であることが分かる. これは有限次元空間の話だから言えることで, 無限次元の線形写像では一般には成り立たない.

問題 234 (1pt.) 問題 164 の線形写像 $\sigma\colon V \to V$ は全射だが単射でないことを示せ.

問題 235 (1pt.) 問題 165 の線形写像 $\tau\colon V \to V$ は単射だが全射でないことを示せ.

8.4 行列の固有空間 (おまけ)

ちょっと先取りして固有空間の話もやって, $\dim\ker(A)$ の公式が役に立つことを実感しよう. 今までの知識で十分理解できる話だけやっておく.

問題 236 (1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して[‡], 次の集合の等式を示せ.

$$\ker(\alpha E_n - A) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}\}$$

α がいろいろ変わるとき部分空間 $\ker(\alpha E_n - A)$ もいろいろ変わるのだが, $\ker(\alpha E_n - A) \neq 0$, つまり $\dim\ker(\alpha E_n - A) \geq 1$ のとき α を A の**固有値** (eigenvalue) とよび, $\ker(\alpha E_n - A)$ の中の 0 ベクトルでないベクトルを A の固有値 α に対する**固有ベクトル** (eivenvector), $\ker(\alpha E_n - A)$ を固有値 α に対する**固有空間** (eigenspace) という. 与えられた行列の固有値を全部求めるために次が便利である.

問題 237 (特性方程式, 2pt.) $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, x の n 次多項式 $\det(xE_n - A) = 0$ の解はすべて固有値であり, 固有値はそれらで尽くされることを示せ (Hint: 問題 115, 140, 233).

特に $n \times n$ 行列の固有値は n 個以下であり, 重複も込めればぴったり n 個あることが分かる.

問題 238 (2pt.) 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と固有空間の次元を求めよ.

問題 239 (2pt.) $\theta \in \mathbb{R}$ として, 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のすべての固有値と固有空間の次元を求めよ.

[‡]固有値を議論するときは複素数体の方が都合がよいことが多い.