

-1 集合論の用語

憶えてもらいたい集合論の用語と記号をまとめておく。

X, Y を集合とする. X の各元 x に対して Y の元 y を **1つ** 対応させる規則が定められているとき, この対応を X から Y への**写像**という (二つ以上対応させるものも考えたりもするが, その場合は写像とは言わない).

f が X から Y への写像であることを $f: X \rightarrow Y$ で表し, X を f の**定義域**, Y を f の**終域**という. f の終域 Y が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の時は, f を**関数**という. 二つの写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ があれば, $x \in X$ に対して, $g(f(x)) \in Z$ を対応させられる. この写像を $g \circ f$ と書き, f と g の**合成写像**という.

A を X の部分集合であるとする. このとき A を f で送った先 $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ を f による A の**像**という. 特に $f(X)$ を f の像とか**値域**という.

今度は B を Y の部分集合とする. このとき B を f で引き戻したものを $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を f による B の**原像**とか**逆像**という†

写像 f の値域が Y と一致するとき, すなわち $f(X) = Y$ のとき, f は**全射**であるとか**上への写像**であるという.

また写像 f が任意の異なる 2 元 $x, x' \in X$ を異なる 2 元 $f(x), f(x') \in Y$ に写像するとき, f は**単射**であるとか**1対1の写像**であるという.

全射かつ単射な写像を**全単射**あるいは**1対1の上への写像**という. f が全単射な写像であるならば, 元 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在するから, $y \in Y$ に対してこの $x \in X$ を対応させられる. この写像を f の**逆写像**といい $f^{-1}: Y \rightarrow X$ と書く.

0 数ベクトル空間の復習

0.1 数ベクトル空間

行列式の話をする予定であったが, 数ベクトル空間の話をふりかえる. 読んで「?」と思った人は, 重大な問題が起きているおそれがあるので, 出来る限り早く適当な本 (最後の参考文献を参照のこと) で調べるなどして, 頭にしっかりインストールしておくこと.

自然数 $\mathbb{N}$, 整数 $\mathbb{Z}$, 有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ の性質については, [吉, p.4] 参照のこと. ポイントは個々の数を考えるだけでなく, それらの和 (加法), 積 (乗法), 分数 (商) の 3 つの演算規則をもつ集まりとして考えることである. 以後, 説明の簡便性の為に $\mathbb{R}$ 上の (有限次元) 数ベクトル空間について解説するが, $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{C}$ においても同様の性質がなりたつことを注意しておく.

自然数 n に対して, 集合 $\mathbb{R}^n$ を n 個の実数の組の集まりとする:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

これだけでは集合 $\mathbb{R}^n$ はただの集合であるが, 下記のように**加法** (足し算) と**スカラー倍** (実数倍) の構造を持たせることができる:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad a(x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n), \quad a \in \mathbb{R}.$$

また**0ベクトル** $0 := (0, \dots, 0)$ を定める. こうして定めた加法とスカラー倍と 0ベクトルから「成り立ってほしい自然な関係式」[吉, p.89] が得られる (例えば $a(x+y) = ax+ay$ や $x-x=0$ 等).

*<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

†この f^{-1} はただの記号で「逆写像」の意味ではないことに注意.

この構造をもたせて $\mathbb{R}^n$ を考えるとき、 $\mathbb{R}^n$ を ($\mathbb{R}$ 上の) **数ベクトル空間[‡]**といい、 n を $\mathbb{R}^n$ の **次元**という。ちなみに各元 $(x_1, \dots, x_n)$ を **ベクトル**と呼び、今は横に書いているが、縦に書いたりもする。横に書く時は横ベクトル、縦に書く時は縦ベクトルという。

今は $\mathbb{R}^n$ を扱ったが、加法やスカラー倍でさっきの「成り立ってほしい自然な関係式」をもつ例は他にも沢山あることに気づく (たとえば行列の空間 $M_n(\mathbb{R})$ なんかはそう)。それで一段高みに登って、抽象的にベクトル空間を定義できるが、それは別の機会に解説したい。

0.2 次元と基底

前のところでは、次元と呼ばれる数を導入したが、これがベクトル空間のどのような性質を反映した数なのかをまとめる。

まず $\mathbb{R}^1$ を考える。何でもいから 0 でないベクトル v をもってくればどんなベクトルもそのスカラー倍で書けることは明らかである。よってこのベクトル v とスカラー倍するという操作が、 $\mathbb{R}^1$ のベクトル空間としての性質をすべて握っていることが分かる。

次に $\mathbb{R}^2$ を平面に見立てて考察しよう。さっきのように何でもいから 0 でないベクトル v_1 を取る。 v_1 のスカラー倍で書けるベクトルは、 v_1 と同じ方角のベクトルのみである。つまりこれだけでは足りないのである。しかしもう一つ別の方向を向いた v_2 を取れば、 v_1 と v_2 のそれぞれのスカラー倍の和ですべてのベクトルが書けそうだと、いうのはよいだろう。もちろん三つ目のベクトル v_3 を合わせて、 $\{v_1, v_2, v_3\}$ のスカラー倍と和ですべてのベクトルを書くことができるが、二個で済むものをわざわざ三個で表すのはいかにも効率が悪い。よってこういう性質をもつベクトルの個数のうち最小のものが次元 2 を表すだろうということが予想出来る。

つまり次元とは、空間の広がり具合を示す数だと理解できる。この考察を厳密にするために、一次結合、一次独立性そして基底の概念を導入する。

定義 0.1 $\mathbb{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間とする。

- $x_1, \dots, x_k$ を $\mathbb{R}^n$ の (0 ベクトルでもよい) k 個のベクトルとする。スカラーたち $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ を用意してそれぞれ掛けて足し上げて新しいベクトル $a_1x_1 + \dots + a_kx_k$ を作ることができる。こうして作ったベクトルを $\{x_1, \dots, x_k\}$ の **一次結合[§]** と呼ぶ。
- k 個のベクトルたち $\{x_1, \dots, x_k\}$ が **一次独立[¶]** であるとは、スカラーたち $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ についての方程式 $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0$ の解が、 $a_1 = \dots = a_k = 0$ のみであることをいう。また、一次独立でないことを **一次従属^{||}** であるという。
- もしもある k 個のベクトルたち $\{x_1, \dots, x_k\}$ が、 $\mathbb{R}^n$ の全てのベクトルを一次結合で表すことができるとき、 $\{x_1, \dots, x_k\}$ は $\mathbb{R}^n$ を **張る** という。
- k 個のベクトルたち $\{x_1, \dots, x_k\}$ が $\mathbb{R}^n$ の **基底** (base) であるとは、それらが一次独立かつ $\mathbb{R}^n$ を張ることをいう。

たとえば、 $e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0)$ とすると (i 番目だけ 1 で残りは 0)、ベクトルたち $\{e_1, \dots, e_n\}$ が基底となることは簡単に分かる。基底は他にも取れるが、実は基底を構成するベクトルの個数はいずれも同じで、 $\mathbb{R}^n$ の n に等しいことが示せる [吉, p.96]。これはいつかやることにする。また数学をやっていると、与えられたベクトルたちが基底かどうかを調べることがよくある。これには簡単なチェック方法 (行列のランクを求める等) があるが、これも後回しにする。

まず一次独立性の判定する練習をやってみよう。これは現時点ではやるのが決まっています (ランクを求める方が未知数を書く必要もないし簡単)、連立方程式を解けばいいのでそれほど難しくない。

[‡] $\mathbb{Q}^n$ なら $\mathbb{Q}$ 上の、 $\mathbb{C}^n$ なら $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間という。どのスカラーたちを考えるかが重要なので、こうして「何々上の」と明言するとよいが、言わなくても何を指すか明らかな場合は省略することが多い。

[§]線形結合 (linear combination) ともいう。

[¶]線形独立 (linearly independent) ともいう。

^{||}線形従属 (linearly dependent) ともいう。

問題 9 ((1), (2):1pt, (3), (4):2pt.) 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルたちが一次独立か否かを判定せよ:

$$(1). \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

問題 10 ((1):1pt, (2), (3):2pt.) 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルたちが一次独立か否かを判定せよ:

$$(1). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2). \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3). \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

0.3 線形写像と行列

次に線形写像について復習する. 二つのベクトル空間の間の「自然な」写像が線形写像である.

定義 0.2 二つのベクトル空間 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の間** の写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が**線形写像**であるとは, 次をみたすときにいう:

- f は和を保つ, すなわち $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ がすべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対してなりたつ.
- f はスカラー倍を保つ, すなわち $f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$ がすべての $a \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対してなりたつ.

こういうきつい条件をみたすのが線形写像であり, 後でやるがそれは基本的に行列と同等のものである. しかし与えられた1つの線形写像を行列表示したときには, 基底に何を選ぶかで成分が変わってくることに注意する必要がある. 大体の数学の現場では, 線形写像が始めに与えられていて, その固有値などを調べるときに都合の良い基底をとって, 行列表示して計算するというところをする. 線形代数学では, 「興味ある数学の問題を解くための技術を学ぶのだ」と思っておけばよい. とにかくいくつか線形性についての問題をやってみよう.

問題 11 (各 2pt.) 次の写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が線形であるか否かを判定せよ:

$$(1). f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (2). f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ |x_2| \end{pmatrix}, \quad (3). f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3^2 \end{pmatrix}.$$

問題 12 ((1), (2):2pt, (3):1pt.) 次の写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が線形であるか否かを判定せよ:

$$(1). f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (2). f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (3). f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

線形写像がみたす性質をいくつか導いておこう.

問題 13 (1pt.) 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は 0 ベクトルを 0 ベクトルへ移す, つまり $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ がなりたつことを示せ.

次に線形写像は基底の行き先によって, 各ベクトルの行き先が決まってしまうことをみよう. ベクトルの個数は無限個あるのに, 基底をなすベクトルは有限個である. 普通の写像ではこんな幸運なことは成り立たないが, 線形写像は有限個のデータだけで決まってしまう.

**次元 n, m は異なるかもしれないことに注意.

問題 14 (2pt.) 二つの線形写像 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ があるとする. $\{x_1, \dots, x_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ のある基底とする. もしも $f(x_i) = g(x_i)$ がすべての $i = 1, \dots, n$ で成り立つならば, $f = g$ であることを示せ.

集合論では写像の合成をよく考えるが, ここでは線形写像の合成について考えてみよう. 二つの線形写像の合成写像は, 次にみるようにやはり線形性をもつ. つまり線形性は合成によって壊れない.

問題 15 (2pt.) 二つの線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ の合成写像 $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ を考える. このとき $g \circ f$ は線形写像であることを示せ.

単射性をチェックするのによく使う大事な補題を示しておこう.

問題 16 (2pt.) 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ について次は同値であることを示せ:

- f は単射である.
- $x \in \mathbb{R}^n$ が $f(x) = 0$ をみたせば, $x = 0$ である.

もちろん単射でなければ, 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ は 0 ベクトルでないベクトルを含む. この集合は線形代数でとても重要なので, ここで記号を準備しておく.

定義 0.3 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対して, 始集合 $\mathbb{R}^n$ の次の部分集合を定める:

$$\ker(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

これを f の核 (kernel) という.

線形性があるために $\ker(f)$ がよい部分集合となることをみよう.

問題 17 (2pt.) 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の核 $\ker(f)$ に対して, 次がなりたつことを示せ:

- $\ker(f)$ は和で閉じている, すなわち, もし $x, y \in \ker(f)$ ならば, $x + y \in \ker(f)$ がなりたつ.
- $\ker(f)$ はスカラー倍で閉じている, すなわち, $a \in \mathbb{R}, x \in \ker(f)$ ならば, $ax \in \ker(f)$.

この性質だけを抽出して新しい概念をつくろう.

定義 0.4 W を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. もし W が次の性質をみたせば, W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間という:

- W は和で閉じている, すなわち, もし $x, y \in W$ ならば, $x + y \in W$ がなりたつ.
- W はスカラー倍で閉じている, すなわち, $a \in \mathbb{R}, x \in W$ ならば, $ax \in W$.

前の問題は線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の核 $\ker(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることをいっている. 実はすべての部分空間はある線型写像の核として実現できるが, これは後回しにする.

問題 18 (各 1pt.) 次の部分集合 W が部分空間であるか否かを判定せよ:

$$(1). W = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^1, \quad (2). W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2, \quad (3). W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

参考文献

[齋] 齋藤 正彦, 線型代数入門, 東大出版会.

[齋] 齋藤 正彦, 線型代数演習, 東大出版会.

[佐] 佐武 一郎, 線型代数学, 裳華房.

[吉] 吉野 雄二, 基礎過程 線形代数, サイエンス社.

[他] 線形代数の入門書は沢山あるしネットでも調べられるので, 自分に合うものを選んでください.