

## 0.3 線型写像と行列 つづき

まず前回のおさらいをしよう.  $\mathbb{R}^n$  の  $k$  個のベクトルたち  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  をとる. 未知数  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  についての方程式:

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_k \mathbf{x}_k = 0$$

を考える. 明らかにこれは  $(a_1, \dots, a_k) = (0, \dots, 0)$  を解にもつ. もしもこの方程式の解が  $(a_1, \dots, a_k) = (0, \dots, 0)$  のみである (つまりそれ以外の組  $(a_1, \dots, a_k)$  が解になりえない) ならば,  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  は一次独立であるというのであった.

**問題 19 ((1),(2):1pt, (3):2pt.)** 次の  $\mathbb{R}^3$  のベクトルたちが一次独立か否かを判定せよ ( $\theta \in \mathbb{R}$ ):

$$(1). \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, (2). \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}, (1). \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

さて線形写像に対して, もう一つ重要な像と呼ばれる集合を定義しよう.

**定義 0.5** 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して, 終域  $\mathbb{R}^m$  の次の部分集合を定める:

$$\text{Im}(f) := \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

これを  $f$  の像 (image) という.

やはり  $\ker(f)$  と同じく,  $\text{Im}(f)$  は終域の部分空間となる.

**問題 20 (2pt.)** 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の像  $\text{Im}(f)$  は  $\mathbb{R}^m$  の部分空間であることを示せ.

あとでやるが, 次元に関する重要な等式がなりたつ:

$$n = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f).$$

ここで  $\dim$  は次元を表すが, そもそもまだ定義していないのでまだ示せない.

さて線形写像に慣れてきたところで, その行列表示について学ぼう.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とする.  $\mathbb{R}^n$  の標準的な基底  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  を取っておく, つまり

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次に各  $1 \leq j \leq n$  に対して,  $f(\mathbf{e}_j) \in \mathbb{R}^m$  を  $\mathbb{R}^m$  で座標表示する.

$$f(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

\*<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

こうして出来た  $n$  本の縦ベクトルを左から順に並べて出来る行列を  $A$  と書く:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

この行列のことをここでは  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の**表現行列**とよぶ<sup>†</sup>.

表現行列が線形写像の全てを握っていることを観察しよう. 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の表現行列を  $A$  と書く.  $\mathbb{R}^n$  のベクトル  $\mathbf{x}$  が  $f$  でどう変換されるかを  $A$  を使って書きたい. まず  $\mathbf{x}$  を座標表示しよう:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

これは言い換えると,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$$

ということである. この両辺に  $f$  を引っ掛けると, 線形性から次のように変形できる.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= f(x_1 \mathbf{e}_1) + \cdots + f(x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

ここで  $f(\mathbf{e}_j)$  が行列  $A$  の第  $j$  列目であるから, 最終行をさらに変形すると

$$f(\mathbf{x}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

となることが分かる. 左辺の  $\mathbf{x}$  を座標表示に直せば, 次の等式を得る:

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

つまり線形写像  $f$  によるベクトル  $\mathbf{x}$  の変換先を知りたいければ,  $f$  の表現行列を (縦ベクトル表示した)  $\mathbf{x}$  に掛ければよいことが分かった.

**問題 21 (各 2pt.)** 次の写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  は線形写像である. それらの表現行列を求めよ.

$$(1). f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}, (2). f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, (3). f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqrt{2}x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**問題 22 (各 2pt.)** 次の写像  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は線形写像である. それらの表現行列を求めよ.

$$(1). f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, (2). f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}, (3). f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

<sup>†</sup>実際は  $\mathbb{R}^n$  と  $\mathbb{R}^m$  の基底の選び方に自由度を持たせるが, 最初なので簡単に標準的な基底についてだけ行う.

この問題 (1) の  $f$  の  $\ker(f)$  を記述しよう.  $\mathbf{x} \in \ker(f)$  を特徴づけるということである. ここでは各ベクトルをパラメータ表示してみよう.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  (横に書いてあるが本当は縦ベクトル) とする. すると次が分かる:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

それゆえ  $x_2 = -2x_3$ ,  $x_1 = x_3$  と表示できる. つまり  $x_3$  一つだけの自由度だけ生き残っていて,  $x_3$  をパラメータ  $t$  に取り換えて<sup>‡</sup>,

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

と記述できた. これは確かに部分空間  $\mathbb{R}^3$  のである.

**問題 23 (2pt.)** 前問 (2),(3) の線形写像  $f$  について,  $\ker(f)$  を記述せよ.

このあたりの話は, 抽象的なベクトル空間のところでもう一度説明する. 慣れてしまえばそちらの方が一般的でかつ分かりやすい. 慣れるには講義だけ聞いているだけでは不十分で, 自分で本を読んだり演習問題を解いたりして (講義では分からないことも自分でやってみると結構分かったりするものである), 自分の時間を使って腕力を鍛えることが必要である.

## 4 行列式 つづき

### 4.1 対称群

対称群  $\mathfrak{S}_n$  の話をしていた. 対称群の定義については No.1 か [吉, p.53] を参照してほしい.

まずいくつか言葉の準備をする.  $\mathfrak{S}_n$  の元を **置換** (permutation) という. 2つの置換  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$  の合成写像  $\sigma \circ \tau: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  を真ん中の丸印を省いて単に  $\sigma\tau$  と書く. これは全単射な写像の合成だから  $\sigma\tau$  も全単射, つまり  $\sigma\tau \in \mathfrak{S}_n$  である. また  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  の逆写像 (**逆置換** という)  $\sigma^{-1}$  もまた全単射であるから  $\mathfrak{S}_n$  の元である. 最後に恒等写像  $1_n: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  は明らかに  $\mathfrak{S}_n$  の元である (**単位置換** という).

**問題 24 (各 1pt.)**  $n$  を自然数,  $\sigma, \tau, \rho \in \mathfrak{S}_n$  とすると次が成り立つ<sup>§</sup>.

- (1) (結合律)  $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$ ,
- (2) (単位元の存在)  $1_n\sigma = \sigma = \sigma 1_n$ ,
- (3) (逆元の存在)  $\sigma\sigma^{-1} = 1_n = \sigma^{-1}\sigma$ .

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$  とする. このとき  $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  は全単射であるから, 異なる番号を異なる番号へ移している, つまり  $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$  は相異なる数である. そこで,  $\sigma$  を次のように表示するとしばしば便利である.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

これは上の段にある数をそれぞれ真下の数に変換することを示している. 上下の対応表が大事なので, 上の段は左から  $1, 2, \dots, n$  と並んでいる必要はない. たとえば,  $\mathfrak{S}_3$  の次の元は同じものを表している.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

<sup>‡</sup>こうするのは単に見栄えの問題である.

<sup>§</sup>対称群に限らずこの 3つの性質をみたす演算をもつ集合のことを一般に群 (group) とよぶ [齋, p.248]

**問題 25 (1pt.)** 置換  $\sigma$  の表示が (4.1) で与えられているとき、逆置換  $\sigma^{-1}$  の表示が次で与えられることを示せ:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

$\sigma$  と  $\tau$  の合成について少し練習してみよう.

**問題 26 (各 1pt.)**  $\mathfrak{S}_3$  において,  $\sigma$  と  $\tau$  が次の置換の時, 合成  $\sigma\tau$  の表示を求めよ.

$$(1). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, (2). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

**問題 27 (各 1pt.)**  $\mathfrak{S}_4$  において,  $\sigma$  と  $\tau$  が次の置換の時, 合成  $\sigma\tau$  の表示を求めよ.

$$(1). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, (2). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

**問題 28 (各 1pt.)** 上の問題 27 に出てきた  $\sigma$  の逆置換  $\sigma^{-1}$  を表示せよ.

## 4.2 互換

単位置換の次に簡単な置換である互換を定義しよう.

**定義 4.1**  $\{1, \dots, n\}$  の置換であって, 2 つの文字を交換して, 残りの  $n-2$  個の文字を動かさないものを **互換** (transposition) とよぶ.

$\{1, \dots, n\}$  の互換で  $i$  と  $j$  のみ交換するものは前の記号で書くと (ここでは  $i < j$  のときを表示する),

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

となるが, 他の数が現れて分かりづらいので, 単にこれを  $(i\ j)$  と書くことにする.  $(j\ i)$  も同じものを表すことにする. 例えば,  $(1\ 2) = (2\ 1)$  は, 1 と 2 を交換する互換である.

**問題 29 ((1,2),(3,4):1pt.)** 次の互換  $\sigma, \tau$  は  $\mathfrak{S}_3$  の置換である. その合成  $\sigma\tau$  を表示せよ.

$$(1). \sigma = (1\ 2), \tau = (1\ 2), (2). \sigma = (1\ 2), \tau = (1\ 3), (3). \sigma = (1\ 2), \tau = (2\ 3), (4). \sigma = (2\ 3), \tau = (1\ 2).$$

**問題 30 (2pt.)**  $n$  次の対称群  $\mathfrak{S}_n$  の  $(n-1)$  個の互換  $s_i, 1 \leq i \leq n-1$  を  $s_i = (i\ i+1)$  と定めると, 次の関係式がなりたつことを示せ:

- (1)  $s_i^2 = 1_n$  (すべての  $i$  に対して),
- (2)  $s_i s_j = s_j s_i$  ( $|i-j| \geq 2$  なるすべての  $i, j$  に対して),
- (3)  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  (すべての  $1 \leq i \leq n-2$  に対して) <sup>¶</sup>.

上の問題の (3) を一般化してみよう. 次の公式はきれいだし覚えておくとよい.

**問題 31 (2pt.)** 置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  と互換  $(i\ j) \in \mathfrak{S}_n$  に対して, 次の等式が成り立つことを示せ<sup>||</sup>:

$$\sigma(i\ j)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j)).$$

<sup>¶</sup>この等式の値は  $(i\ i+2)$  である

<sup>||</sup> $\sigma$  と  $\sigma^{-1}$  で  $(i\ j)$  をはさむと, 括弧の中に  $\sigma$  が入るということ.