

4.2 互換 つづき

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の話の続きを始めよう. 二個の数字だけ交換する互換について前回説明した. 次の目標は全ての置換を互換の積で表すことである.

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は, 番号 i を $\sigma(i)$ に移すのであった. 最初に番号 1 と $\sigma(1)$ を比べよう. もし, $1 \neq \sigma(1)$ ならば, 左から互換 $(1 \ \sigma(1))$ を引っ掛けて新しい置換 $\sigma_2 := (1 \ \sigma(1))\sigma$ を作る. すると $\sigma_2(1) = 1$ が分かる. よって σ_2 は 1 は固定して, $\{2, \dots, n\}$ を置換する. もし $\sigma(1) = 1$ なら, $\sigma_2 = \sigma$ とする. 次は 2 と $\sigma_2(2)$ を比べて, 左から適当な互換を掛けて 2 を固定するようにする. このとき $(2 \ \sigma_2(2))$ を左から引っ掛けるのだが, 1 は σ_2 で固定されるから, 引っ掛けた後も 1 が固定される. よって σ の左から互換を多くて二つかけることで, 1 と 2 を固定できた. 後はこの議論を $3, 4, \dots$ と繰り返していけば, 最終的に互換を多くて n 個[†] $\tau_1, \dots, \tau_n$ だけ σ の左から引っ掛けると, $\{1, 2, \dots, n\}$ を全て固定する置換, つまり恒等置換 1_n に変形できる. 式で書くと, $\tau_n \tau_{n-1} \cdots \tau_1 \sigma = 1_n$. 両辺に左から $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n$ を掛けると,

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n$$

となる. よって任意の置換は多くて n 個の互換の積に表せることが分かった. 一般には因数分解みたいに, 積が唯一つに決まるものではないし, 個数もいろいろ変わってしまう.

問題 32 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_3$ の置換 σ を互換の積で表せ.

$$(1). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, (2). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, (3). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, (4). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

問題 33 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_4$ の置換 σ を互換の積で表せ.

$$(1). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, (2). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, (3). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, (4). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

となり合う数を交換する互換 $s_i = (i \ i+1)$ を思い出そう. 実は $s_1, \dots, s_{n-1}$ の積で任意の置換を表せる. 任意の置換は互換の積であらわせるのだから, 互換が s_i たちの積になることを示せば十分である. 少し実験してみると, $s_1 s_2 s_1 = (1 \ 3)$, $s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 = (1 \ 4)$ となる.

問題 34 (2pt.) $1 \leq i < j \leq n$ とすると, 次が成り立つことを示せ:

$$(i \ j) = s_i s_{i+1} \cdots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \cdots s_{i+1} s_i,$$

ここで $j = i+1$ のときは, 右辺は s_i を表すものとする.

したがって全ての置換が, 隣同士を入れ替える互換たち $s_1, \dots, s_{n-1}$ を使って表せることがわかった.

さて置換を互換の積に表せることは分かったが, その個数一つには定まらなかった. しかし実はその個数の**偶奇性** (parity) は, σ から決まってしまう. つまり, σ を 2 通りに互換の積で書いたとする, $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_n = \tau'_1 \cdots \tau'_m$. すると, n が偶数なら必ず m も偶数で, n が奇数なら必ず m も奇数, というのである.

一つのものを書き表すのにいろいろ表示があるが, その表示によらない「何か」(不変量とよぶ)を見つけないということが数学ではとても大事である.

*<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

[†] $\{1, \dots, n-1\}$ まで固定してしまえば, 自動的に n も固定されるから, 本当は多くて $n-1$ 個で書ける.

4.3 置換の符号

さて parity が置換から決まってしまうことを見よう. 多少天下りのだが, 多項式の空間への作用を考えると見通しがよい.

整数係数の n 変数多項式全体を $A := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ とかく. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (n 次対称群の n と変数の個数 n が一致していることに注意) に対して, $\pi(\sigma): A \rightarrow A$ を次で定める. $p = p(x_1, \dots, x_n) \in A$ に対して, $\pi(\sigma)p = p(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ と定める[‡]. つまり新しい多項式 $\pi(\sigma)p$ は, さっきの p の中に出てきた x_i を $x_{\sigma(i)}$ に変えるというだけである. たとえば $p = x_i \in A$ なら, $\pi(\sigma)p = x_{\sigma(i)}$ である.

問題 35 (各 1pt.) 次の $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $p \in A$ に対して, $\pi(\sigma)p$ を求めよ:

$$(1). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, p = x_1^2(x_3 + x_4) + x_2^3, \quad (2). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, p = x_1x_2 + x_2x_3^2.$$

多項式の変換 $\pi(\sigma): A \rightarrow A$ は, 次の意味でとても自然である.

問題 36 (各 1pt.) $p, q \in A$, $c \in \mathbb{Z}$ に対して, 次を示せ:

$$(1). \pi(\sigma)(p + q) = \pi(\sigma)p + \pi(\sigma)q, \quad (2). \pi(\sigma)(pq) = \pi(\sigma)p \cdot \pi(\sigma)q, \quad (3). \pi(\sigma)(cp) = c\pi(\sigma)p.$$

つまり $\pi(\sigma)$ は積の構造を保つ線形写像みたいなものである. さて今までは一個の置換 σ について考えたが, 別の置換 τ をもってこよう. すると二つの写像 $\pi(\sigma): A \rightarrow A$ と $\pi(\tau): A \rightarrow A$ が引き起こされるため, 合成写像 $\pi(\sigma) \circ \pi(\tau): A \rightarrow A$ を考えられる. これと $\pi(\sigma\tau): A \rightarrow A$ は実は等しい[§].

問題 37 (2pt.) $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して, 次の等式を示せ:

$$\pi(\sigma) \circ \pi(\tau) = \pi(\sigma\tau).$$

ここまで来たらもう一息である. $A = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ の中の特別な多項式 Δ_n を次で定める:

$$\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

この積は 1 から n までの間にある, $i < j$ なる i, j を取るたびに掛け合わせるという意味である. だから積の個数は $n(n-1)/2$ である. 多項式 Δ_n を **差積** (difference product) とよぶ. たとえば $n = 2$ なら, $\Delta_2 = x_1 - x_2$ であり, $n = 3$ なら $\Delta_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ である.

問題 38 (各 1pt.) $n = 4, 5$ について, 差積を計算せよ (展開する必要なし).

さて $n = 2$ として, $s_1 = (1\ 2)$ にたいして $\pi(s_1)\Delta_2$ を計算すると,

$$\pi(s_1)\Delta_2 = \pi(s_1)(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 = -\Delta_2.$$

また $n = 3$ として, $s_1 = (2\ 3)$ とすると

$$\pi(s_1)\Delta_3 = \pi(s_1)((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)) = (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) = -\Delta_3.$$

これを一般化して次の重要な結果を得る.

問題 39 (2pt.) 互換 $s_i = (i\ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $\pi(s_i)\Delta_n = -\Delta_n$ となることを示せ.

この結果と問題 34, 37 から次を得る.

問題 40 (1pt.) $\tau \in \mathfrak{S}_n$ を互換とすれば, $\pi(\tau)\Delta_n = -\Delta_n$.

[‡] $\pi(\sigma)$ は写像なので本当は $\pi(\sigma)(p)$ と書くときよいが, 単に $\pi(\sigma)p$ と書いた.

[§]一般に, 群が何か集合の上に**作用**しているとは, 問題 37 の等式をみたす変換を起こしているときいう.

これで parity の問題が解ける.

問題 41 (1pt.) 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を互換たち $\tau_1, \dots, \tau_n$ と $\tau'_1, \dots, \tau'_m$ を使って, $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_n = \tau'_1 \cdots \tau'_m$ と 2 通りに表示したとすると, $(-1)^n = (-1)^m$ がなりたつ. つまり n と m の parity は一致する.

定義 4.2 n を自然数, $\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とする.

- 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が, 偶数個の互換の積で表せるとき **偶置換** (even permutation) とよび, 奇数個の互換の積で表せるとき **奇置換** (odd permutation) とよぶ.
- 写像 $\text{sgn}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ を σ が偶置換なら $\text{sgn}(\sigma) = 1$, 奇置換なら $\text{sgn}(\sigma) = -1$ と定める. この $\text{sgn}(\sigma)$ を σ の **符号** (sign) とよび, 写像 $\text{sgn}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ を **符号表現** (sign representation) とよぶ.

もちろん定義から次がいえる.

$$\pi(\sigma)\Delta_n = \text{sgn}(\sigma)\Delta_n.$$

簡単だがとても重要な等式を示そう. この性質が行列式のところで効いてくる.

問題 42 (1pt.) 置換 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して, 次の等式を示せ:

$$\text{sgn}(1_n) = 1, \quad \text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau).$$

問題 43 (1pt.) 次を示せ.

- (1) $\mathfrak{S}_2$ の置換をすべて列挙せよ.
- (2) それらを偶置換, 奇置換に分けよ. それぞれいくつあるか.

問題 44 (2pt.) 次を示せ.

- (1) $\mathfrak{S}_3$ の置換をすべて列挙せよ.
- (2) それらを偶置換, 奇置換に分けよ. それぞれいくつあるか.

問題 45 (2pt.) $\mathfrak{S}_n$ の偶置換の個数と奇置換の個数は等しいことを示せ. それぞれいくつあるか.

続いて問題 42 の性質は, 関数を規定してしまうぐらい強いことを学ぼう.

問題 46 (3pt.) 実数値関数[¶] $f: \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{R}$ が問題 42 の性質, つまり

$$f(1_n) = 1, \quad f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau), \quad \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n.$$

をみたすとする. 次を示せ:

- (1) 互換 τ に対して, $f(\tau) = 1$ または $f(\tau) = -1$.
- (2) 2 つの互換 τ_1, τ_2 に対して, $f(\tau_1) = f(\tau_2)$.
- (3) 写像 f は次のうちどちらかである:

- すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $f(\sigma) = 1$.
- すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $f(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の偶置換を集めてできる部分集合を $\mathfrak{A}_n$ と書く.

[¶]複素数値でも有理数値でも同じ結果がなりたつ.

問題 47 (各 1pt.) 集合 $\mathfrak{A}_n$ について次を示せ:

- (1) $\mathfrak{A}_n$ は積について閉じている, つまり $\sigma, \tau \in \mathfrak{A}_n$ ならば $\sigma\tau \in \mathfrak{A}_n$.
- (2) $\mathfrak{A}_n$ は逆元について閉じている, つまり $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ ならば $\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_n$.
- (3) $\mathfrak{A}_n$ は次の性質をもつ: もし $\sigma \in \mathfrak{A}_n, \tau \in \mathfrak{S}_n$ ならば, $\tau\sigma\tau^{-1} \in \mathfrak{A}_n$.

(1), (2) の性質から $\mathfrak{A}_n$ を n 次の**交代群** (alternating group) とよぶ. (3) は $\mathfrak{A}_n$ が $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群であることをいっている. 今は特に必要ないが, 次のことも知っておくとよいかもしれない.

定義 4.3 n を自然数とし, 前のように $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用 π を考える.

- 多項式 p が**対称多項式**^{||} (symmetric polynomial) であるとは, $\pi(\sigma)p = p$ がすべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ でなりたつことをいう.
- 多項式 p が**交代多項式** (alternating polynomial) であるとは, $\pi(\sigma)p = \text{sgn}(\sigma)p$ がすべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ でなりたつことをいう.

問題 48 (1pt.) 次の $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ の多項式のうち, 対称多項式を選べ.

- (1). $x_1 + x_2 + x_3$, (2). $x_1 + x_2 + x_3^2$, (3). $x_1^7 x_2^7 x_3^7 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, (4). $(x_1 + x_2 - x_3)^2$.

問題 49 (2pt.) 次の同値性を示せ.

- $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ は交代多項式である
- ある対称多項式 $q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ があって, $p = q\Delta_n$ と書ける.

一般の多項式は対称でも交代でもないが, 置換を引っ掛けて重みを付けて足しあげる (対称群の上で積分する) と, 対称多項式や交代多項式ができることを見よう.

問題 50 (2pt.) 多項式 $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ に対して, 新しい多項式 $S(p), AS(p) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ を

$$S(p) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \pi(\sigma)p, \quad AS(p) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma)\pi(\sigma)p$$

と定める. すると, $S(p)$ は対称多項式, $AS(p)$ は交代多項式であることを示せ.

問題 51 (1pt.) $p = x_1 x_2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ のとき, $S(p)$ と $AS(p)$ を求めよ.

問題 52 (1pt.) $p = x_2 x_3 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ のとき, $S(p)$ と $AS(p)$ を求めよ.

問題 53 (1pt.) 多項式 $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ が対称多項式のとき, $x_n = 0$ とした多項式 $p(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ も $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ で対称多項式であることを示せ.

群の表現や対称多項式の話には, そんなにレベルが高なくても面白い話題が沢山あるので, 興味のある人は参考文献を調べてみよう.

参考文献

[高] 高木貞治, 代数学講義, 共立出版.

[平] 平井 武, 線形代数と群の表現 I, II, 朝倉書店.

^{||}単に対称式ともいう. 同じように交代多項式を交代式ともいう.