

4.3 置換の符号 つづき

置換の符号を定めたので、早速計算問題をやってみよう。

問題 54 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_4$ の置換 σ の符号を求めよ。

$$(1). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, (2). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, (3). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, (4). \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 置換のサイクル分解

最後に符号を求めるのに個人的に好きな方法を紹介します。実例で示した方が分かりやすいと思うので、 $\mathfrak{S}_6$ の次の置換 σ を取り扱うことにする。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

この表示が何を意味したのか思い出そう。 σ は全単射 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を引き起こす。例えば $\sigma(1) = 5$ である。まず (1 でなくても何でもよいが) 1 から σ を何回も作用させていこう。すると、

$$1 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} \dots$$

のように、1, 5, 3 を周期的に繰り返している。この現象は問題 8 の帰結である。次に 1, 5, 3 以外の数を何でもよいから取ってくる。例えば 2 を取ってきて、 σ を何回も作用させていくと、

$$2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} \dots$$

のように、2, 6 を周期的に繰り返している。次に 1, 5, 3, 2, 6 以外の数を取ってくるのだが、それは 4 の 1 つだけであり、次のように 4 は固定されている。

$$4 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} \dots$$

つまり σ は、 $\{1, 5, 3\}$ の置換と、 $\{2, 6\}$ の置換と $\{4\}$ の置換に分解する。そこで次の記号を用意する。まず $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ と変換し、それ以外の数は固定するという置換を $(1\ 5\ 3)$ と書く。同様に $2 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ と変換し、それ以外の数は固定するという置換を $(2\ 6)^\dagger$, $4 \rightarrow 4$ と変換し、後は固定する置換を (4) と書くが、これは結局恒等置換 1_6 に等しい: $(4) = 1_6$. だからこれは省いてもよく、次がなりたつ:

$$\sigma = (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4) = (1\ 5\ 3)(2\ 6).$$

実際例えば $\sigma(5)$ の値を比べてみる。 $(1\ 5\ 3)(2\ 6)(4)$ の右から番号 5 に作用する。 (4) は恒等置換なので、何もせず 5 のまま。次の $(2\ 6)$ は 5 を固定するのでここでも 5 のまま。最後の $(1\ 5\ 3)$ で 5 は 3 に変換される。これは $\sigma(5) = 3$ と一致する。もし二段組みの表示で書けば、それぞれの置換は次のように書ける。

$$(1\ 5\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad (2\ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

*<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

†これで互換の記号の出所がはっきりした。

(1 5 3) のような形の置換を**巡回置換**というが、二段組みの表示よりもすっきりとしているため、沢山数字を書かなくてよいことが利点である。

一般に $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ をいくつかの巡回置換の積に表せ、かつそれらの置換はさっきの (1 5 3) と (2 6) のように番号が異なっているようにできる (問題 61). この巡回置換の積の表示を σ の**サイクル分解**という. サイクル分解をしたとき、巡回置換の順番は気にしなくてもよい (問題 60). たとえば、さっきの σ なら

$$\sigma = (1\ 5\ 3)(2\ 6) = (2\ 6)(1\ 5\ 3).$$

問題 55 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_7$ の置換の二段組みの表示を求めよ.

$$(1). (1\ 4\ 6)(2\ 3), \quad (2). (2\ 5\ 1\ 7)(3\ 4\ 6), \quad (3). (2\ 6)(3\ 7\ 5\ 1), \quad (4). (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7).$$

問題 56 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_6$ の置換をサイクル分解せよ.

$$(1). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (2). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 57 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_7$ の置換をサイクル分解せよ.

$$(1). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

問題 58 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_8$ の置換をサイクル分解せよ.

$$(1). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad (2). \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

問題 59 (各 1pt.) $\mathfrak{S}_7$ において、左辺と右辺の二段組み表示を求めて等式を示せ:

$$(1). (1\ 7\ 4)(5\ 6) = (5\ 6)(1\ 7\ 4), \quad (2). (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 6\ 7) = (2\ 6\ 7)(1\ 3\ 4\ 5), \quad (3). (3\ 2\ 6)(4\ 5) = (4\ 5)(3\ 2\ 6).$$

上の問題を一般化しよう.

問題 60 (巡回置換の交換性, 2pt.) n を自然数, $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$ と $(j_1\ j_2\ \cdots\ j_\ell)$ を $\mathfrak{S}_n$ の巡回置換とする ($i_1, \dots, i_k$ は互いに異なる番号, $j_1, \dots, j_\ell$ も互いに異なる番号). もしも $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell$ がすべて異なる番号ならば、その二つの巡回置換は交換する:

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)(j_1\ j_2\ \cdots\ j_\ell) = (j_1\ j_2\ \cdots\ j_\ell)(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k).$$

問題 61 (サイクル分解, 3pt.) n を自然数, $\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群とする. このとき任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ はサイクル分解できることを示せ. つまり,

$$\sigma = (i_1\ \cdots\ i_k) \cdots (j_1\ \cdots\ j_\ell)$$

のように、そこに出てきた番号たち $\{i_1, \dots, i_k, \dots, j_1, \dots, j_\ell\}$ がすべて異なるように分解できることを示せ (Hint: 問題 8).

さてサイクル分解に慣れてきたところで、符号の計算に取りかかろう. すべての置換はサイクル分解により巡回置換の積で表示される:

$$\sigma = (i_1\ \cdots\ i_k) \cdots (j_1\ \cdots\ j_\ell).$$

ここで符号表現 $\text{sgn}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ の問題 42 の性質により

$$\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}((i_1\ \cdots\ i_k)) \cdots \text{sgn}((j_1\ \cdots\ j_\ell)).$$

したがって各巡回置換の符号が分かれば、 $\text{sgn}(\sigma)$ が計算できる.

問題 62 (各 1pt.) 次の $\mathfrak{S}_7$ での互換の積は 1 つの巡回置換で表せる. それを求めよ.

(1). $(1\ 2)(1\ 3)$, (2). $(3\ 4)(3\ 1)(3\ 7)$, (3). $(1\ 3)(1\ 5)(1\ 6)(1\ 2)$, (4). $(6\ 7)(6\ 1)(6\ 5)(6\ 2)(6\ 3)$.

上の結果を一般化しよう.

問題 63 (2pt.) $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ を互いに異なる番号とする. このとき次の等式を示せ.

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_k)(i_1\ i_{k-1}) \cdots (i_1\ i_2).$$

これからただちに次が分かる.

問題 64 (巡回置換の符号, 1pt.) $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ を互いに異なる番号とする. このとき次の等式を示せ[‡].

$$\operatorname{sgn}((i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)) = (-1)^{k-1}.$$

この公式を使って始めにやった $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ の符号を求めよう.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 3)(2\ 6).$$

であった. よって,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{3-1}(-1)^{2-1} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

問題 65 (各 1pt.) 問題 56(1)-(3) の置換をサイクル分解して符号を求めよ.

問題 66 (各 1pt.) 問題 56(1)-(3) の置換を互換の積に分解して符号を求めよ.

問題 67 (各 1pt.) 問題 57(1)-(3) の置換をサイクル分解して符号を求めよ.

問題 68 (各 1pt.) 問題 57(1)-(3) の置換を互換の積に分解して符号を求めよ.

問題 69 (各 1pt.) 問題 58(1)-(3) の置換をサイクル分解して符号を求めよ.

問題 70 (各 1pt.) 問題 58(1)-(3) の置換を互換の積に分解して符号を求めよ.

問題 71 (各 2pt.) 次の $\mathfrak{S}_{15}$ の置換について問いに答えよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 2 & 12 & 4 & 10 & 11 & 6 & 13 & 3 & 15 & 1 & 14 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) σ をサイクル分解して符号を求めよ.

(2) σ を互換の積に分解して符号を求めよ.

ところで問題 64 の公式によれば, 巡回置換の中身の個数が符号に影響するだけで, 中身の番号がいくつかは関係ないことがわかる. たとえば $\mathfrak{S}_6$ において

$$\operatorname{sgn}((1\ 5\ 3)) = \operatorname{sgn}((2\ 4\ 3)) = \operatorname{sgn}((5\ 6\ 1)) = (-1)^{3-1} = 1.$$

これがなぜか考えてみよう. 次は問題 31 の一般化である.

問題 72 (2pt.) 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と巡回置換 $(i_1\ \cdots\ i_k) \in \mathfrak{S}_n$ に対して, 次がなりたつことを示せ.

$$\sigma(i_1\ \cdots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \cdots\ \sigma(i_k)).$$

[‡] $(-1)^k$ でなく $(-1)^{k-1}$ であることに注意!

問題 73 (1pt.) 巡回置換 $(i_1 \cdots i_k) \in \mathfrak{S}_n$ に対して、次をみたす置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在することを示せ.

$$\sigma(i_1 \cdots i_k)\sigma^{-1} = (1 \ 2 \ \cdots \ k).$$

したがって問題 42 の sgn の性質から,

$$\begin{aligned} \text{sgn}((1 \ 2 \ \cdots \ k)) &= \text{sgn}(\sigma(i_1 \cdots i_k)\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}((i_1 \cdots i_k)) \text{sgn}(\sigma^{-1}) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma^{-1}) \text{sgn}((i_1 \cdots i_k)) = \text{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) \text{sgn}((i_1 \cdots i_k)) \\ &= \text{sgn}(1_n) \text{sgn}((i_1 \cdots i_k)) \\ &= \text{sgn}((i_1 \cdots i_k)). \end{aligned}$$

これから $\text{sgn}((i_1 \cdots i_k)) = \text{sgn}((1 \ 2 \ \cdots \ k))$ が分かり、右辺では $i_1, \dots, i_k$ が消えてしまったから、この数は $i_1, \dots, i_k$ に依存しないことが納得できる。

5 行列式

5.1 定義から分かるいくつかの結果

この章では行列式の性質 (多重線形性+交代性) と計算術について学ぶ。

定義 5.1 $n \times n$ 行列の空間 $M_n(\mathbb{R})$ から $\mathbb{R}$ への写像 $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する. 正方行列 $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ に対して,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

実数 $\det(A)$ を行列 A の**行列式**とよぶ.

$\det(A)$ を $|A|$ と書く. くだいようだが, もとの A は**正方行列**で, 行列式 $\det(A)$ は (実) **数**である[§]. 行列式は置換群の各置換 σ に対して, $\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ を計算して, すべての置換について足しあげるというちょっと複雑な格好をしている. しかも $\mathfrak{S}_n$ の要素の個数は問題 7 でやったように $n!$ だから, 一般に大変な足し算になる. たとえば, 4×4 行列の行列式なら $4! = 24$, 5×5 行列なら 120 である. しかし本当に定義式を使って計算するのはあまりないので, 安心して欲しい (ないこともないけれど). まず問題 43, 44 を参考にして次の問題をやってみよう.

問題 74 (各 1pt.) 次の n のとき, $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ の行列式を求めよ.

- (1) $n = 2$ のとき (おなじみの公式).
- (2) $n = 3$ のとき (サラスの公式).

問題 75 (1pt.) 行列 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ に対して, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ がなりたつことを示せ.

問題 76 (1pt.) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ がなりたたない行列 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ の例をあげよ.

次の結果は重要である.

問題 77 (1pt.) 単位行列 $E_n \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, $\det(E_n) = 1$ であることを示せ.

問題 78 (各 1pt.) 行列 $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ に対して次を示せ.

- (1) A の成分 a_{ij} がすべて整数ならば, $\det(A)$ も整数.
- (2) A の成分 a_{ij} がすべて有理数ならば, $\det(A)$ も有理数.

[§] $M_n(\mathbb{Q})$ や $M_n(\mathbb{C})$ の行列を考えれば, 行列式はそれぞれ $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{C}$ に値をもつ.