

5.1 定義から分かるいくつかの結果 つづき

問題 79 (1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対して、 $\det(cA) = c^n \det(A)$ がなりたつことを示せ[†].

問題 80 (転置不変性, 1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して、 $\det({}^tA) = \det(A)$ であることを示せ.

問題 81 (2pt.) 次の等式がなりたつことを示せ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

こういう形の行列については、1 列目と 1 行目からなる「L 字」の所を取りさってできる $(n-1) \times (n-1)$ 行列の行列式と $(1, 1)$ 成分の積に等しいということである。

問題 82 (下三角行列の行列式, 1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ の (i, j) 成分 a_{ij} が[‡], $i < j$ するとき $a_{ij} = 0$ であれば、 $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ であることを示せ (下三角行列の行列式 = 対角成分の積)。

もちろん問題 80 から上三角行列に対しても同じ公式がなりたつ。

5.2 行列式の多重線形性と交代性

行列式の多重線形性と交代性を学ぼう。 $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{i,j}$ [‡] に対して、 A の列ベクトルを左から $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ と書く：

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

すると $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ であり、 $\det(A) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ を調べることになる[§]。今は行列から n 個の列ベクトルを作ったが、もちろん n 個の列ベクトル $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ から行列 $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ を逆に構成できることに注意しよう。以後 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \overset{k}{\underset{\vee}{c}}, \dots, \mathbf{d})$ と書いたら、**左から数えて k 番目に c がある**ことを意味する。

問題 83 (多重線形性, 1pt.) ベクトルたち $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n (j = 1, \dots, n)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ:

$$(1) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{k}{\underset{\vee}{\mathbf{a}_k + \mathbf{b}}}, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{k}{\underset{\vee}{\mathbf{a}_k}}, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{k}{\underset{\vee}{\mathbf{b}}}, \dots, \mathbf{a}_n).$$

* <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

[†] c の肩に乗っかっている n は行列のサイズである。

[‡] A の (ij) 成分を a_{ij} と書くという意味。

[§] もとの行列 A にはカンマを付けないので本当は $(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$ と書くべきだが、見やすさ優先のためカンマを付ける。

$$(2) \det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = c \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n).$$

次に交代性について学ぼう. 行列 $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ の列を置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ で動かして新しい行列 $A_\sigma = (\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)})$ を作る. ここで A_σ の k 番目の縦ベクトルは $\mathbf{a}_{\sigma(k)}$ である, つまり A の $\sigma(k)$ 番目の縦ベクトルを k 番目にもってきたものである.

問題 84 (各 1pt.) 次の 2×2 行列 A と置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ に対して, A_σ を求めよ.

$$(1). A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = (1 \ 2), \quad (2). A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 1_2.$$

問題 85 (各 1pt.) 次の 3×3 行列 A と置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して, A_σ を求めよ.

$$(1). A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = (1 \ 2 \ 3), \quad (2). A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = (1 \ 3 \ 2).$$

問題 86 (交代性 2pt.) $n \times n$ 行列 A と置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $\det(A_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) \det(A)$, つまり

$$\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n).$$

がなりたつことを示せ.

問題 81 の一般化も次のように考えられる.

問題 87 (1pt.) 次の等式を示せ:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} a_{1k} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

つまり 1 行目の k 番目の数字以外が 0 ならば, その行列式は k 列目と 1 行目からなる「 T 字」の所を取りさってできる $(n-1) \times (n-1)$ 行列の行列式に $(-1)^{k-1}$ と a_{1k} を掛けたものに等しい.

5.3 いろいろな公式

問題 86 から特に次が分かる. $1 \leq i < j \leq n$ となる i, j を交換する互換 $\sigma = (i \ j)$ に対して,

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{i}{\underset{\vee}{\mathbf{a}}_i}, \dots, \overset{j}{\underset{\vee}{\mathbf{a}}_j}, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{j}{\underset{\vee}{\mathbf{a}}_j}, \dots, \overset{i}{\underset{\vee}{\mathbf{a}}_i}, \dots, \mathbf{a}_n).$$

つまり 2 つの列を交換すると -1 がでてくる. このことから, 次も分かる.

問題 88 (1pt.) $1 \leq i < j \leq n$ をみたす i, j と, ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して, もしも $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ (これを $\mathbf{b}$ と書くことにする) ならば,

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{i}{\underset{\vee}{\mathbf{b}}}, \dots, \overset{j}{\underset{\vee}{\mathbf{b}}}, \dots, \mathbf{a}_n) = 0.$$

つまり同じ列がある行列に対しては行列式は 0 であることが分かった. 行列式は複雑な定義式であったのに, こういうケースでは計算もせずに 0 になることがいえるのである. この公式を次のように一般化しておこう.

問題 89 (1pt.) ベクトル $a_1, \dots, a_n$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立つことを示せ: $i \neq j$ ならば ($i < j$ でも $i > j$ でもよい),

$$\det(a_1, \dots, \overset{i}{\underset{\vee}{a_i + ca_j}}, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \overset{i}{\underset{\vee}{a_i}}, \dots, a_n).$$

つまり**ある列のスカラー倍をしてできたベクトルを、異なる列のベクトルに加えても行列式の値は不変**ということである。もちろんこの結果も多重線形性と交代性から出てきたものである。問題 80 を経由すると、同様のことが行についても言える。つまり**ある行のスカラー倍をしてできたベクトルを、異なる行のベクトルに加えても行列式の値は不変**である。

現時点で行列式を求めるには、次のようにやるのがよいであろう (いつもこうしなければならない、というわけではない)。

- (1) 問題 89 とその行バージョンを使って、 A の 1 行目か 1 列目を $(0, \dots, a, \dots, 0)$ の形にする。
- (2) 問題 87 とその行バージョンを使って、 $(-1)^{k+1}$ と、 T 字部分を消去して小さくしたものの行列式の積に分解する。
- (3) (1), (2) を繰り返して、 2×2 かあるいは 1×1 の行列式を求めることに帰着する。

少し例をやってみよう。次の行列 A の行列式を求める:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

計算のコツは、0 を増やすように打ち消していくことである。例えば次のように計算できる (今回は列のみを変形していく)。やり方はもちろん一通りではない。人によっては途中で分数が出てくるかもしれないが、もとの行列が整数成分のみをもつから最終結果は整数になる (問題 78(1))。

$$\begin{aligned} \det(A) &\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & -2 & -5 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(4)}{=} (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & -5 \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 24 & -7 \\ -6 & 1 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(7)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 33 & 24 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(8)}{=} (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 33 & 24 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(9)}{=} 33 \cdot 1 - (-1) \cdot 24 = 57. \end{aligned}$$

- (1): 1 列目+3×(2 列目) (2): 3 列目+2×(2 列目) (3): 4 列目+4×(2 列目)
 (4): 問題 87 (5): 3 列目+(-2)×(2 列目) (6): 2 列目+(-3)×(3 列目) (7): 1 列目+(-5)×(3 列目)
 (8): 問題 87 (9): 問題 74(1)

問題 90 (各 1pt.) 次の行列式を計算せよ (以降の問題では、行列式の計算の過程も説明すること):

$$(1). \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2). \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad (3). \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad (4). \begin{vmatrix} -2 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & 15 \\ 2 & 8 & 10 \end{vmatrix}, \quad (5). \begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 4 & 15 & 21 \end{vmatrix}.$$

問題 91 (各 1pt.) 次の行列式を計算せよ:

$$(1). \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2). \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad (3). \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 7 \\ 3 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4). \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 6^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^3 & 6^3 & 4^3 \end{vmatrix}.$$

問題 92 (各 1pt.) 次の行列式を計算せよ ($i = \sqrt{-1}$) ¶:

$$(1). \begin{vmatrix} i & 1 & -i & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \end{vmatrix}, \quad (2). \begin{vmatrix} 1+i & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1-i & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2i \\ 2 & i & i & 2 \end{vmatrix}, \quad (3). \begin{vmatrix} 2 & 3+i & 2 & 3 \\ 2+2i & 2 & 3i & 0 \\ 4 & -3-i & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2i \end{vmatrix}.$$

問題 93 (各 2pt.) 次の行列式を計算せよ:

$$(1). \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix}, \quad (2). \begin{vmatrix} -0.2 & -0.2 & -0.1 & -4/3 & -0.02 \\ -0.4 & -0.4 & -0.1 & -2/3 & -0.02 \\ -0.6 & -0.2 & -0.1 & -1 & -0.03 \\ -0.1 & -0.3 & -0.1 & -2/3 & -0.02 \\ -0.3 & -0.5 & -0.1 & -1/3 & -0.01 \end{vmatrix}, \quad (3). \begin{vmatrix} 30 & 20 & 30 & 40 & 20 \\ 10 & -40 & 30 & 20 & -20 \\ 20 & 20 & 0 & 50 & -10 \\ 10 & 60 & 10 & -20 & 10 \\ 10 & 0 & 10 & 20 & 20 \end{vmatrix}.$$

問題 94 (各 1pt.) 次の行列式を求めよ ($\theta, \varphi \in \mathbb{R}, r > 0$):

$$(1). \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}, \quad (2). \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}, \quad (3). \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos(\theta + \varphi) \\ \cos \theta & 1 & \cos \varphi \\ \cos(\theta + \varphi) & \cos \varphi & 1 \end{vmatrix}.$$

問題 95 (2pt.) 次の行列式を計算せよ:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

問題 96 (2pt.) $n \times n$ 行列 A, B に対して, 次の等式を示せ:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

問題 97 (各 1pt.) 次の行列式を因数分解した形で求めよ:

$$(1). \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}, \quad (2). \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}.$$

この問題を一般化しよう.

問題 98 (Vandermonde の行列式, 2pt.) 次の等式を示せ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Delta(x_1, \dots, x_n),$$

ここで $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ は差積 Δ_n (4 回目のプリント参照) のことである.

¶ これまで実数体上の話をしてきたが, 複素数体上でも行列式を計算するルールは同じである.