線形代数学 I 演習 No.7

11 月 11 日配布

担当：戸松 玲治*

5.4 行列式の特徴付け

もう少し行列式の性質を学ぼう．行列式は多重線形性と交代性をもつが, 実はこの 2 つの性質をもつ写像は実質的に (定数倍を除けば, という意味) 行列式だけであることを示そう.

問題 99 (行列式の特徴付け, 3pt.) 写像 $F\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が次の 2 つの性質をみたすとする:

- (多重線形性) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, スカラー $c \in \mathbb{R}$ そして $1 \leq k \leq n$ なる k に対して,

$$F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\overset{k}{\vee}}{\boldsymbol{a}_k + c\boldsymbol{b}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\overset{k}{\vee}}{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) + cF(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\overset{k}{\vee}}{\boldsymbol{b}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

- (交代性) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ と置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して,

$$F(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \cdots, \overset{\overset{k}{\vee}}{\boldsymbol{a}_{\sigma(k)}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\overset{k}{\vee}}{\boldsymbol{a}_k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$$

このとき, $F(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = F(E_n) \det(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ であることを示せ (E_n は単位行列である).

問題 100 (積公式, 2pt.) 行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し, 等式 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を示せ.

問題 101 (1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が**巾零** (べきれい, nilpotent) 行列であるとする, つまりある $m \in \mathbb{N}$ が存在して, $A^m = 0$ であるとする．このとき $\det(A) = 0$ であることを示せ.

問題 102 (1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が**直交** (orthogonal) 行列であるとする, つまり ${}^tAA = E_n$ が成り立てば, $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ.

問題 103 (1pt.) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が正則†であれば, $\det(A) \neq 0$ であることを示せ.

実は逆が成り立つこと, つまり $\det(A) \neq 0$ なら A は正則であることを問題 115 で示す.

問題 104 (1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ と $B \in M_m(\mathbb{R})$, そして $n \times m$ 行列 C に対して, 次の等式を示せ:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

この 0 はすべての成分が 0 の $m \times n$ 行列のことである.

問題 105 (1pt.) 行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 次の等式を示せ

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \left|\det(A + \sqrt{-1}B)\right|^2.$$

問題 106 (1pt.) 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

---

*http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html

†A が逆行列をもつということ.

5.5 余因子と行列式の展開

これまで鍛えてきた計算術を武器に, これから徐々に線形代数の深いところへ入っていこう. まず最初の目標は, 逆行列を求める一般的公式の導出である.

定義 5.1 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して次を定める.

- A から第 i 行, 第 j 列を取り除いて出来る $(n-1)$ 次行列式を**第** (i,j) **小行列式** (the (i,j) minor) といい, $M(A)_{ij}$ と書く.
- 第 (i,j) 小行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の**第** (i,j) **余因子** (the (i,j) cofactor) といい, $\Delta(A)_{ij}$ と書く.
- **余因子行列** $\mathrm{Cof}(A)$ を次で定める[‡]:

$$\mathrm{Cof}(A) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \Delta(A)_{ji}.$$

問題 107 (1pt.) (i,j) 成分に $(-1)^{i+j}$ をもつ $n \times n$ 行列を書いてみて, チェッカーフラグのようになっていることを示せ.

よって余因子行列を求めるには次のようにするとよい.

- (i,j)-minor $M(A)_{ij}$ を求めて, 行列 $M = (M(A)_{ij})_{ij}$ を作る (ここでは転置しない).
- minor 行列 M の成分の $+ \cdot -$ をチェッカーフラグ模様のごとく反転させる ($(1,1)$ 成分は $+$).
- 最後に転置して $\mathrm{Cof}(A)$ が求められる.

いくつか練習してみよう.

問題 108 (各 1pt.) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき,

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) A の余因子行列 $\mathrm{Cof}(A)$ を求めよ.

(3) 等式 $A\,\mathrm{Cof}(A) = \det(A)E_3 = A\,\mathrm{Cof}(A)$ を示せ (E_3 は単位行列).

問題 109 (各 1pt.) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 問題 108 のように (1),(2),(3) に答えよ.

問題 110 (各 1pt.) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -21 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき, 問題 108 のように (1),(2),(3) に答えよ.

[‡]添え字 (i,j) が反転していることに注意! 文献によっては添え字を反転させないものを cofactor matrix, その転置行列を adjugate matrix と呼ぶので, こちらも注意.

問題 111 (各 1pt.) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 問題 108 のように (1),(2),(3) に答えよ.

問題 108(3) の関係は一般になりたつ (問題 114). そのために余因子展開 (cofactor expansion) を学ぼう.

定理 5.2 (1 行 (列) 目での余因子展開) $A = (a_{ij})_{i,j}$ を $n \times n$ 行列, $\Delta(A)_{ij}$ をその第 (i,j) 余因子とすると次がなりたつ.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\Delta(A)_{1j} = a_{11}\Delta(A)_{11} + a_{12}\Delta(A)_{12} + \cdots + a_{1n}\Delta(A)_{1n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\Delta(A)_{i1} = a_{11}\Delta(A)_{11} + a_{21}\Delta(A)_{21} + \cdots + a_{n1}\Delta(A)_{n1}. \end{aligned}$$

1 列目についての展開式 (下の方) を示す. 1 行目の展開も同様である. A の成分表示を $A = (a_{ij})_{i,j}$ とする. また $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル表示する. $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ について, $\boldsymbol{a}_1$ を展開すると,

$$\boldsymbol{a}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\boldsymbol{e}_i = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n$$

となる. $\det(A)$ の一列目について線形性を使うと,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(a_{i1}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n). \end{aligned}$$

となるが, 問題 87 の列バージョンによって,

$$\begin{aligned} \det(a_{i1}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) &= (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1\,2} & a_{i-1\,3} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,2} & a_{i+1\,3} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}\Delta(A)_{i1}. \end{aligned}$$

したがって, 次を示せた.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\Delta(A)_{i1}.$$

等式だけ見ても分かりづらいと思うので, 行列 A のどこの成分とどこの余因子を掛けて足し上げているかを図的に理解するとよい.

問題 112 (各 1pt.) 問題 90(1-5) の行列式を余因子展開によって求めよ.

この問題をやると分かると思うが, 行列式を余因子展開で求めると一般に大変である. 時には有効なので計算術の一つとして必要に応じて利用しよう.

問題 113 (余因子展開 (一般型), 2pt.) $A = (a_{ij})_{i,j}$ を $n \times n$ 行列, $\Delta(A)_{ij}$ をその第 (i,j) 余因子とすると次がなりたつ (Hint:問題 86 を適切な置換について利用).

$$\delta_{i,k} \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta(A)_{kj} = a_{i1}\Delta(A)_{k1} + a_{i2}\Delta(A)_{k2} + \cdots + a_{in}\Delta(A)_{kn}$$
$$\delta_{j,\ell} \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta(A)_{i\ell} = a_{1j}\Delta(A)_{1\ell} + a_{2j}\Delta(A)_{2\ell} + \cdots + a_{nj}\Delta(A)_{n\ell}.$$

この問題から次の結果が得られる.

問題 114 (1pt.) A を $n \times n$ 行列とすると,

$$A\,\mathrm{Cof}(A) = \det(A)E_n = \mathrm{Cof}(A)A.$$

よって特に次の定理が示せる.

問題 115 (逆行列をもつことの判定法, 1pt.) 次が同値であることを示せ.

$$\text{正方行列 } A \text{ は正則である} \iff \det(A) \neq 0.$$

問題 116 (1pt.) 問題 98 の Vandermonde の行列が逆行列を持つための必要十分条件を求めよ.

実際 $\det(A) \neq 0$ ならば, その逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{Cof}(A) \tag{5.1}$$

である. 右辺の $\det(A)$ や, $\mathrm{Cof}(A)$ は行列式を根気よく計算すれば求められるし, 逆行列の一般型をすっきりとした形で記述しているという点で強力である. いくつかこの方法で逆行列を求めてみるが, 具体的な行列の逆行列を求めるのなら, 後でやる別の方法を使った方が効率的であることが多い.

問題 117 (1pt.) 2×2 行列に対して, 公式 (5.1) を書き下せ.

問題 118 (各 1pt.) 問題 90(1-5) の行列の逆行列 (があれば) を公式 (5.1) を使って求めよ[§].

4×4 行列の逆行列を余因子行列から求めるとなると, それ自身の行列式とともに, 9 つの余因子 (3×3 の行列式) を求めなくてはならない. 次の問題をやってみるといかにハードかが分かるだろう.

問題 119 (各 2pt.) 問題 91(1-4) の行列の逆行列 (があれば) を公式 (5.1) を使って求めよ.

正方行列 A が正則であるとは, 逆行列をもつことであった. つまり同じサイズの正方行列 B が存在して, $BA = E_n = AB$ をみたすことをいうのだが, 実は左側だけの等式 $BA = E_n$ から $AB = E_n$ も言えてしまうことも分かる (もちろん右側だけの等式から左側の等式も言える)

問題 120 (左逆元 = 右逆元, 1pt.) 行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に左逆行列 B が存在したとすると[¶], B は右逆逆行列でもあり, $B = A^{-1}$ であることを示せ (右側の時も同様).

この定理はサイズが無限の行列に対しては一般に成り立たない.

問題 121 (おまけ, 3pt.) 無限サイズの行列 A, B で, BA は単位行列だが, AB は単位行列でないものを作れ.

[§] こういう問題では必ず検算すること. すなわちもとの行列にできあがりの行列をかけて単位行列になることを確かめる.
[¶] $BA = E_n$ をみたすこと.