線形代数学 I 演習 No.8

11 月 18 日配布
担当：戸松 玲治*

5.6 行列式と逆行列のいくつかの問題

問題 122 (1pt.) 次の定理を示せ:

$$\text{上 (下) 三角行列 } A \text{ が正則} \iff \text{対角成分に並ぶ数は 1 つも 0 でない.}$$

問題 123 (三角行列の逆行列, 2pt.) 正則な上三角行列の逆行列は上三角行列であることを示せ (下三角の逆行列なら下三角). また逆行列の対角成分ともとの上三角行列の対角成分の関係を調べよ.

問題 124 (1pt.) 問題 104 の形の行列 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ が正則であることの必要十分条件は, A と B がともに正則であることを示せ. またこのとき逆行列は次で与えられることを示せ.

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

少し群とよばれる対象にも触れてみよう†.

問題 125 (1pt.) 集合 $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は正則 }\}$ について次を示せ‡.

(1) (積で閉じる) $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ ならば $AB \in GL_n(\mathbb{R})$.

(2) (単位行列が入る) $E_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

(3) (逆行列が入る) $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ならば, $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$.

問題 126 (1pt.) 集合 $B_+ := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は正則かつ上三角 }\}$ について次を示せ§.

(1) (積で閉じる) $A, B \in B_+$ ならば $AB \in B_+$.

(2) (単位行列が入る) $E_n \in B_+$.

(3) (逆行列が入る) $A \in B_+$ ならば, $A^{-1} \in B_+$.

問題 127 (1pt.) 集合 $SO(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は直交行列かつ } \det(A) = 1\}$ について次を示せ¶.

(1) (積で閉じる) $A, B \in SO(n)$ ならば $AB \in SO(n)$.

(2) (単位行列が入る) $E_n \in SO(n)$.

(3) (逆行列が入る) $A \in SO(n)$ ならば, $A^{-1} \in SO(n)$.

問題 128 (1pt.) $-E_n \in SO(n) \Leftrightarrow n$ は偶数 であることを示せ.

問題 129 (2pt.) $H_1, H_2 \subset GL_n(\mathbb{R})$ が上の問題でやってきた 3 性質 (積で閉じること, 単位行列が入ること, 逆行列が入ること) をみたしていれば, $H_1 \cap H_2$ もその 3 性質をみたすことを示せ.

---

*http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html
†置換群 $\mathfrak{S}_n$ の性質 (問題 24) と見比べよう.
‡GL = general linear. $GL_n(\mathbb{R})$ を実一般線形群とよぶ.
§B は数学者 A. Borel の頭文字. B_+ を $GL_n(\mathbb{R})$ のボレル部分群と呼ぶ.
¶直行行列については問題 102 参照. SO = special orthogonal. $SO(n)$ を特殊直交群とよぶ.

6　行列のランクと逆行列

6.1　行列のランク

行列のランクは前期に学んだので, ここではさっと復習するだけにしよう. ここで扱う行列は長方形行列であり, 正方形とは限らない. 次の 3 タイプの正方行列 (**基本行列**という) を用意する (いずれの行列もサイズは n). ここで行列単位 E_{ij} を思い出そう (No.1 参照. (i,j) 成分のみ 1 で他の成分は 0 という行列であった. 単位行列 E_n と混同しないこと!).

$$P_n(i,j) := \sum_{k\neq i,j} E_{kk} + E_{ij} + E_{ji}, \quad Q_n(i;c) := \sum_{k\neq i} E_{kk} + cE_{ii}, \quad R_n(i,j;d) := E_n + dE_{ij}.$$

いずれも $i \neq j$, $c \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$ である[‖]. 和は 1 から n まで取る (条件 $k \neq i, j$ や $k \neq i$ の元で).

問題 130 (1pt.) 3 つの行列 $P_n(i,j)$, $Q_n(i;c)$, $R_n(i,j;d)$ を成分表示せよ.

これらを行列 A の左, 右から掛けてみるとどうなるであろうか.

問題 131 (1pt.) 行列 $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ の左から $P_n(i,j)$, $Q_n(i;c)$, $R_n(i,j;d)$ をかける (**左基本変形**) とそれぞれどうなるか.

問題 132 (1pt.) 行列 $A = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ の右から $P_n(i,j)$, $Q_n(i;c)$, $R_n(i,j;d)$ をかける (**右基本変形**) とそれぞれどうなるか.

左からかけると行が加えられたりして, 右からかけると列が加えられたりすることを憶えておこう.

問題 133 (1pt.) 基本行列は正則であり, 逆行列はそれぞれ次で与えられることを示せ.

$$P_n(i,j)^{-1} = P_n(i,j), \quad Q_n(i;c)^{-1} = Q_n(i;c^{-1}), \quad R_n(i,j;d)^{-1} = R_n(i,j;-d).$$

さて $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ の (p,q) 成分 a_{pq} が 0 でなかったとしよう. このとき $Q_m(p;a_{pq}^{-1})A$ とすると, (p,q) 成分は 1 となる. そして次に $R_m(1,p;-a_{1p})$ をこれに左からかけると, 1 行目に, p 行目の $-a_{1p}$ 倍が加えられるから特に $(1,q)$ 成分は 0 となる. これを 2 行目その他にも行うことで, A に何回か $Q_m(i;c)$, $R_m(i,j;d)$ タイプの基本行列を左からかければ, q 列目は (p,q) 成分だけが 1 で残りは 0 となる. この操作を (p,q) を**かなめ**として第 q 列を**掃き出す**という.

こうしてできあがった行列に列に関しても右から何回か $R_n(i,j;d)$ タイプの基本行列をかけることで, p 行目を (p,q) 成分だけ 1 で残りは 0 にできる. ここまでで, A は (p,q) 成分の 1 を中心に十字の形に 0 が並んだ形になる. この操作を (p,q) を**かなめ**として第 p 行を**掃き出す**という.

定理 6.1 (行列のランク) 任意の $m \times n$ 行列 A は, 基本変形を何回か繰り返すことで次の形の行列に変形される. しかも対角に並んだ 1 の個数は基本変形の仕方によらずに決まる.

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(点線で囲ってある所は } r \times r \text{ 行列).}$$

‖複素数体 $\mathbb{C}$ 上の行列を考えるときはもちろん $c, d \in \mathbb{C}$ も許す.

この形にもっていけることは次のようにすれば分かる．A の (p,q) 成分が 0 でないとする．まず基本変形を先程のように (p,q) 中心で行って十字の形にする．次に左から $P_m(1,p)$, 右から $P_n(1,q)$ をかけると, $(1,1)$ 成分が 1 で, 1 行目, 1 列目の残りの成分は 0 となる．右下にサイズが 1 だけ小さくなった行列があるので, これをさらに基本変形して $(2,2)$ 成分に 1 を置き, 2 行目, 2 列目の残りの成分を 0 とする．それから 2 行目, 2 列目以降の基本変形を繰り返せばよい．1 の並んだ数が基本変形の仕方に依らないことは問題にしよう．

問題 134 (2pt.) 定理 6.1 の r が基本変形の仕方に依らないことを示せ．

この数 r を行列 A の**ランク** (rank, 階数) とよび, $\mathrm{rank}(A)$ と書く．

問題 135 (各 1pt.) 問題 90(1-5) の行列のランクを求めよ．

問題 136 (各 1pt.) 問題 91(1-4) の行列のランクを求めよ．

問題 137 (各 1pt.) 問題 92(1-3) の行列のランクを求めよ．

問題 138 (各 1pt.) 問題 93(1-3) の行列のランクを求めよ．

問題 139 (各 1pt.) 次の行列のランクを求めよ．

$$(1).\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & 5\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 7 & -1 & -5 & 10\end{pmatrix},\quad (2).\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -3 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 1\\ 2 & 10 & -7 & 3\end{pmatrix},\quad (3).\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 13\\ 2 & 5 & 11 & 31\\ -3 & 6 & -3 & 21\end{pmatrix}.$$

A をサイズ n の正方行列とする．1 が対角に r 個並ぶ最終的な形に至るまで左 (右) 基本変形を何回か繰り返しているが, 左 (右) 基本変形は左 (右) から基本行列をかけることで得られるのであった．左基本変形に表れた行列を全部掛けて P, 右基本変形に表れた行列を全部掛けて Q と書くと次のようになっている．

$$PAQ = \begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

これから特に次が分かる (問題 115 も思い出そう)．

問題 140 (逆行列を持つことの判定法 II, 1pt.) 次の定理を示せ．

$$\text{正方行列 } A \text{ は正則である} \iff \mathrm{rank}(A) = n.$$

一般にランクは行列式を求めるより楽に求められるからこの定理は強力である．ただし A の逆行列の形や行列式の値については何も教えてくれない．

問題 141 (各 1pt.) 次の行列が逆行列をもつかどうかをランクを求めて確かめよ．

$$(1).\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 9\\ 6 & 7 & 13\end{pmatrix},(2).\begin{pmatrix}-1 & -1/2 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 9 & -1\end{pmatrix},(3).\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 3\\ 0 & -5 & 4\end{pmatrix},(4).\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{pmatrix},(5).\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 7 & 23 & 6\end{pmatrix}.$$

6.2 逆行列の基本変形による求め方

逆行列は行列式を求めるテクニックさえ身についていれば, 行列式と余因子行列を根性で求めればよいのであった (問題 114)．しかしそれでは大変なので, もう少し労力の少ないやり方を紹介する．

今 $n \times n$ 行列 A が正則であるとする．その逆行列を求めたい．A のランクは n だから (問題 140) 左右からいくつか基本行列を掛けていけば, 単位行列 E_n に変形出来る．このとき左 (右) から掛けて

いった基本行列の積をまとめて P(右からの積は Q) と書く．すると $PAQ = E_n$ が成り立っている．これを $QPA = E_n$ と変形しよう．これは,「正則行列は左基本変形のみを使って単位行列に変形出来る」ということを示している．つまり正則行列については右基本変形は実は必要ないのである．

よってとにかく A を左基本変形のみで単位行列にしたとしよう (基本変形の仕方は人それぞれ)．行列 R をその際使った基本行列の積とすれば,

$$RA = E_n$$

がなりたつから，この R が A^{-1} である (問題 120)．だから基本変形に使った $P_n(i,j)$, $Q_n(i;c)$, $R_n(i,j;d)$ をメモしておいて後はすべてかければ R が求められる．

しかしこれでも面倒なので, 次のように工夫する．A の右横 (左横でもよい) に単位行列 E_n を水増しして, 次の $n \times 2n$ 行列を作る．

$$(A\ E_n) \tag{6.1}$$

この横長行列を 1 度だけ左基本変形してみよう．例えば $P_n(i,j)$ を左からかける (= i 行目と j 行目を交換する) と,

$$\begin{pmatrix} P_n(i,j)A & P_n(i,j) \end{pmatrix}$$

となる．次に例えば $R_n(k,\ell;d)$ を左からかける (= k 行目+ $d\times$(ℓ 行目)) と,

$$\begin{pmatrix} R_n(k,\ell;d)P_n(i,j)A & R_n(k,\ell;d)P_n(i,j) \end{pmatrix}.$$

注目したいのは元の E_n があった場所に, 今まで基本変形に使ってきた基本行列の積が記録されていることである．さて (6.1) を, A のところが E_n になるまで左基本変形を繰り返せば,

$$(E_n\ R) \tag{6.2}$$

という形に変形されるのだが, R は今言ったようにそれまでの基本変形で使った基本行列の積であるから, 元の A が R による左基本変形で E_n に至ったことが分かる．つまり $RA = E_n$ である．よって (6.2) の右マスに現れた R は A^{-1} でなくてはならない．よってまとめると次のようになる．

「左基本変形による逆行列の求め方」
Step 1. 横長行列 $(A\ E_n)$ を書く．
Step 2. 左基本変形 (i.e. 行だけ足し引き可能．列には触れないこと) を行い $(E_n\ R)$ の形にする．
Step 3. この R が求める A^{-1}.

問題 142 (各 1pt.) 次の行列に逆行列があれば左基本変形を使って求めよ．

$$(1).\ \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ (2).\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ (3).\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ (4).\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ (5).\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 143 (各 1pt.) 次の行列に逆行列があれば左基本変形を使って求めよ．

$$(1).\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ (2).\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ (3).\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 19 & 6 & 0 & -3 \\ 22 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix},\ (4).\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 144 (各 1pt.) 次の行列に逆行列があれば左基本変形を使って求めよ (出来上がりの逆行列と転置行列を比べてみよう)．またそれぞれの大きさとなす角度を調べよ．

$$(1).\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ (2).\ \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},\ (3).\ \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$