

7 ベクトル空間と線形写像

7.1 ベクトル空間

これまで数ベクトルと行列のいろんな性質を学んできた。これからはあまり $\mathbb{R}^n$ の列 (行) ベクトル表示にこだわらずにもっと広い視点で線型代数をやろう。そうする御利益は、固有値、固有ベクトルを学ぶとはっきりしてくると思う。最初は抽象的なので戸惑うかもしれないが、やっていくうちに慣れていくもの (他の分野でもそう) なので、ゆっくりしたペースでいいので自分なりに勉強してほしい。

さてベクトル空間の定義を紹介する前に、どんなものであるべきかを考えよう。まずそれは集合でなければならない。次に数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の次の 3 つのエッセンスも持っていないてはならない：

- ベクトルの足し算ができる。
- ベクトルのスカラー倍ができる。
- 0 ベクトルがある。

よって、とある集合に何か足し算、スカラー倍、0 ベクトルがうまく定まればそれをベクトル空間ということにする。慣れてくればこれだけの説明でも十分だと思うが、足し算、スカラー倍そして 0 ベクトルとは何かということも込めて厳密な定義を与えよう。

定義 7.1 (ベクトル空間) 集合 V が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 (vector space) であるとは、

- **足し算 (加法)** と呼ばれる写像 $+: V \times V \ni (a, b) \mapsto a + b \in V$,
- **スカラー倍** と呼ばれる写像 $\cdot: \mathbb{R} \times V \ni (c, a) \mapsto c \cdot a \in V$,
- **0 ベクトル** と呼ばれる元 $0 \in V$ [†]

の 3 つがあらかじめ与えられており、これらが相互に次のルールをみたすときにいう。

- **(足し算の結合則)** $(a + b) + c = a + (b + c)$ がすべての $a, b, c \in V$ で成立。
- **(足し算の可換性)** $a + b = b + a$ がすべての $a, b \in V$ で成立。
- **(0 ベクトルの性質)** $a + 0 = a = 0 + a$ すべての $a \in V$ で成立。
- **(逆ベクトルの存在)** 各 $a \in V$ に対して、 $a + a' = 0 = a' + a$ をみたす元 $a' \in V$ が存在する。
- **(ベクトルの 1 倍)** $1 \cdot a = a$ がすべての $a \in V$ で成立。
- **(スカラー倍の結合則)** $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$ がすべての $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in V$ で成立。
- **(分配則)** $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ がすべての $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ で成立。

*<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

[†]0 のように太字で書いたりもする。

初めはゆっくりこの定義を読んでほしい。長々書いてあるが、各項目はとてもまっとうなことを言っていることに気付くだろう。つまり、あらかじめ定められた足し算、スカラー倍、そして0ベクトルがとても自然な関係を満足している場合にベクトル空間というのだ、ということである。もはやその空間は $\mathbb{R}^n$ のような格好をしていないかもしれないが、大体において集合 V に入るベクトル空間の構造(足し算、スカラー倍、0ベクトルの3つ)は素直なものなので、心配しないでほしい。

いくつか用語の説明をしておく。まずベクトル空間 V の要素のことを**ベクトル**(vector)とよぶ。また今は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を考えたが、同様に $\mathbb{C}$ や $\mathbb{Q}$ 上でも考えられる。よって自分が扱っているベクトル空間の**係数体**($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)としてどれが選ばれているかにまず気をつけなければならない(しかし考えている係数体が自ずと明らか場合は、「 $\cdots$ 上のベクトル空間」と言わずに、単にベクトル空間と言うことも多い)。また以後 $\mathbb{R}$ の時を主に扱っていくが、 $\mathbb{C}$ や $\mathbb{Q}$ に取り換えても同じ結果が出ることが多い。さてまずいくつか練習問題をやってみよう。

問題 145 (0ベクトルの一意性, 1pt.) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。あるベクトル $v \in V$ が0ベクトルの性質(すべての $a \in V$ に対して $a + v = a = v + a$ がなりたつこと)を持つとすると、 $v = 0$ であることを示せ。

問題 146 (0倍は0ベクトル, 1pt.) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。すべての $a \in V$ に対して、 $0 \cdot a = 0$ であることを示せ。

問題 147 (逆ベクトルの一意性, 1pt.) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。 $a \in V$ の逆ベクトルは、 $(-1) \cdot a$ の1つしかないことを示せ。

これまで a の c 倍を $c \cdot a$ と書いてきたが、真ん中の点を省いて ca と書くこともある。また a の逆ベクトル $(-1) \cdot a$ を単に $-a$ と書く。ベクトル空間の具体例を見ていこう。

問題 148 (1pt.) $V = \{0\}$ とする(この0は $\mathbb{R}$ の0)。足し算を $0 + 0 = 0$ 、スカラー倍を $c \cdot 0 = 0$ 、0ベクトルを0と定めれば、 V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示せ(0ベクトル空間という)。

問題 149 (1pt.) 集合 $\mathbb{R}^n$ に、これまでやってきた足し算、スカラー倍の演算と、0ベクトルを用意すると、 $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示せ。

問題 150 (1pt.) $m \times n$ 行列全体のなす集合 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ に、これまでのように足し算、スカラー倍、0行列を定めると、これは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示せ。

もう少し高級なベクトル空間も見えていこう。

問題 151 (1pt.) $\mathbb{R}[x]$ によって、 x についての実係数多項式のなす集合を表す。これに演算と0が自然に入るが、これによって $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示せ。

問題 152 (1pt.) X を集合とし、 $F(X)$ を X 上の関数全体、つまり $F(X) := \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ とする。 $F(X)$ に足し算、スカラー倍、0ベクトルを次で定義すると、 $F(X)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることを示せ。 $f, g \in F(X)$, $c \in \mathbb{R}$ に対して、関数 $f + g$, cf , 0 を

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ (すべての $x \in X$ に対して),
- $(cf)(x) := cf(x)$ (すべての $x \in X$ に対して),
- $0(x) := 0$ (すべての $x \in X$ に対して).

問題 153 (1pt.) $C(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体のなす集合とする。ここに問題152のように、足し算、スカラー倍、0ベクトルを入れるとベクトル空間になることを示せ。

問題 154 (1pt.) $C^1(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数全体のなす集合とする. ここに問題 152 のように, 足し算, スカラー倍, 0 ベクトルを入れるとベクトル空間になることを示せ.

数列の空間には $\mathbb{R}^n$ のように演算を入れる. 今回は収束列だけを考えよう.

問題 155 (1pt.) 集合 V を, 収束する実数列全体のなす集合, つまり $V := \{(a_n)_{n=1}^\infty \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$ とする. 足し算, スカラー倍, 0 ベクトルを次で定義すると, V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることを示せ. 数列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ と実数 c に対して,

- $(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n$, つまり $(a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$,
- $c(a_n)_n := (ca_n)_n$, つまり $c(a_1, a_2, \dots) = (ca_1, ca_2, \dots)$,
- $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$.

もはや微分方程式のようなレベルの高い代物も射程圏内に入っている.

問題 156 (1pt.) $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{k-1}(x)$ を x の $\mathbb{R}$ 値関数とし, 次の k 階の線形常微分方程式を考える.

$$\frac{d^k y}{dx^k} + a_{k-1}(x) \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0.$$

この解の空間 $V := \{y \mid y \text{ は上の常微分方程式をみたす } \mathbb{R} \text{ 値関数}\}$ は自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ.

以上の問題でベクトル空間にもさまざまな種類があることが分かったであろう (まだまだ沢山あるので, 探してみよう). こんなにいろいろあるのだが, それらのエッセンスとして「足し算, スカラー倍, 0 ベクトル」の3つはいずれも持っており (個々にもっと深いことを知りたいときは, この3つとは別の構造も調べることももちろんある), ベクトル空間という1つの土俵に乗っかっているのである. したがってベクトル空間と線形写像の一般的理論を整備しておけば, あとは応用すると抽象的な議論の威力が発揮されて, いろいろ分かってしまうのである.

7.2 線形写像

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を一般化して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間というものを考えた. 今度は行列 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ を一般化しよう. 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ は, $m \times n$ 行列なので $\mathbb{R}^n$ のベクトルを $\mathbb{R}^m$ のベクトルに変換する: $A: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{a} \mapsto A\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. しかもこれはただの写像ではなく, 線形写像である (No.2 定義 0.2 参照). 逆に次のことも分かる.

問題 157 (1pt.) $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像ならば, ある行列 A が存在して $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ がすべての $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対してなりたつ. またこうなる A はただ1つに定まる.

よって行列と線形写像は実は表裏一体のものであることが分かる. そこで次のように一般化する.

定義 7.2 (線形写像) V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 写像 $T: V \rightarrow W$ が**線形写像** (linear map) であるとは, 次をみたすことをいう.

- T は和を保つ, すなわち $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ がすべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して成り立つ.
- T はスカラー倍を保つ, すなわち $T(a\mathbf{x}) = aT(\mathbf{x})$ がすべての $a \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in V$ に対して成り立つ.

線形写像 T でベクトル $\mathbf{x}$ を送って $T(\mathbf{x})$ にすることを変換するとか言う. また曖昧さがなければ, $T(\mathbf{x})$ の括弧を省いてしまって, 単に $T\mathbf{x}$ と書くことも多い.

問題 158 (1pt.) V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. 0 写像 $T: V \rightarrow W$ を $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ で定めると線形写像であることを示せ.

問題 159 (1pt.) 問題 151 のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ を考える. 多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ を取ってくる. このとき掛け算写像 $T_f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ を $T_f(g(x)) = f(x)g(x)$ で定めると, 線型写像であることを示せ.

問題 160 (1pt.) 問題 152 のベクトル空間 $F(X)$ を考える. 点 $x \in X$ に対して, 写像 $\delta_x: F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を $\delta_x(f) = f(x)$ として定めると, これは線型写像であることを示せ.

問題 161 (1pt.) 問題 153 のベクトル空間 $C(\mathbb{R})$ を考える. 積分 $T: C(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ を

$$T(f)(x) := \int_0^x f(t) dt$$

で定めると, T は線型写像であることを示せ.

問題 162 (1pt.) 問題 153 のベクトル空間 $C(\mathbb{R})$ を考える. 空間を反転する写像 $I: C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ を $I(f)(x) := f(-x)$ で定めると, I は線型写像であることを示せ.

問題 163 (1pt.) 問題 154 のベクトル空間 $C^1(\mathbb{R})$ を考える. 微分 $\frac{d}{dx}: C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ は線型写像であることを示せ ($C(\mathbb{R})$ はベクトル空間 (問題 153)).

問題 164 (1pt.) 問題 155 のベクトル空間 V を考える. シフト写像 $\sigma: V \rightarrow V$ を $\sigma((a_n)_n) = (a_{n+1})_n$ と定める, つまり $\sigma((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots)$. すると σ は線型写像であることを示せ.

問題 165 (1pt.) 問題 155 のベクトル空間 V を考える. 右シフト写像 $\tau: V \rightarrow V$ を $\tau((a_1, a_2, \dots)) = (0, a_1, a_2, \dots)$ で定める. すると τ は線型写像であることを示せ.

問題 166 (1pt.) 問題 155 のベクトル空間 V を考える. 偶数番目を並べる写像 $T: V \rightarrow V$ を $T((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_4, \dots)$ とする. すると T は線型写像であることを示せ.

線型写像でない例も学ぼう.

問題 167 (1pt.) $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $v \in V$ をとる. 写像 $T: V \rightarrow V$ を, $T(x) := x + v$ と定める. T が線型写像であることと $v = 0$ であることは必要十分であることを示せ.

問題 168 (1pt.) 関数空間 $F(X)$ を考える (問題 152). 写像 $T: F(X) \rightarrow F(X)$ を 2 乗する写像, つまり $T(f) = f^2$ とする. これは線型写像でないことを示せ.

問題 169 (1pt.) $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}$ 上の数ベクトル空間とする. 共役写像 $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を $T((a_1, a_2, \dots, a_n)) = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ は線型写像でないことを示せ.

問題 170 (1pt.) 問題 155 の数列の空間 V を考える. 絶対値をとる写像 $T: V \rightarrow V$ を $T((a_1, a_2, \dots)) = (|a_1|, |a_2|, \dots)$ とすると, 線型写像でないことを示せ.

ベクトル空間 V, W, X と線形写像 $T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow X$ がある場合, 合成写像 $S \circ T: V \rightarrow X$ が考えられる, つまり $S \circ T$ は $x \in V$ を $S(T(x))$ へ送る. 問題 15 と同様に $S \circ T$ はまた線形写像であることが分かる. これを $S \circ T$ と書くこともあるし, ST と真ん中の丸を省いて書くこともよくあり, 合成写像を S と T の積 (product) ともいうが, これはちょうど行列の積に対応する概念であることを見よう.

問題 171 (1pt.) 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{\ell,m}(\mathbb{R})$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への, $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^\ell$ への線形写像である. 線形写像として合成した線形写像 $B \circ A$ に対応する行列 (問題 157 参照) は BA であることを示せ.

最初は行列の積は何であんな風に定義するのかと疑問に思ったかもしれないが, 合成写像を積と考えているからというのが答えであることが分かった. とても自然だったわけである.