# 数学 IB No.5

10 月 30 日配布
担当：戸松 玲治*

# 7 順序関係

## 7.1 順序

次は順序について学ぼう．集合 $X$ の 2 元 $x, y$ が何らかの基準で関係しているときを考える．今回は同値関係とは別の**順序関係** (order relation) について調べる．同値関係の定義とどこが異なるのかチェックしてほしい．$x \leq y$ とは次の 3 条件がなりたつ関係のことである．

- (反射律) すべての元 $x \in X$ に対して, $x \leq x$
- (反対称律)2 元 $x, y \in X$ が $x \leq y$ かつ $y \leq x$ をみたせば, $x = y$.
- (推移律)3 元 $x, y, z \in X$ が $x \leq y$ かつ $y \leq z$ をみたせば, $x \leq z$.

そして集合 $X$ を順序 $\leq$ 込みで取り扱う場合, $(X, \leq)$ は**順序集合** (ordered set) という．また $x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき, $x < y$ と書く．1 つ注意してほしいことは,「**すべての 2 元** $x, y \in X$ **について,** $x \leq y$ **か** $y \leq x$ **がなりたつ保障はない**」ということである．つまり比較できない 2 元が存在することもある．一般にすべての 2 元 $x, y \in X$ に対して, $x \leq y$ か $y \leq x$ がなりたつとき, $\leq$ は**全順序** (totally order) といって, 順序集合 $(X, \leq)$ を**全順序集合**という．いくつか実例を見ていこう．

**問題 84 (1pt.)** $\mathbb{R}$ に関係 $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$ を入れると, 全順序であることを示せ.

**問題 85 (1pt.)** 集合 $X$ のべき集合 $P(X)$ に関係 $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$ を入れると, 順序であることを示せ.

**問題 86 (1pt.)** 問題 85 の順序が全順序でない例をあげよ.

**問題 87 (1pt.)** 3 点集合 $\{a, b, c\}$ に関係 $\leq$ を次のように入れる．$a \leq x \Leftrightarrow x = b$ or $c$. $b \leq x \Leftrightarrow x = b$. $c \leq x \Leftrightarrow x = c$. これは順序であるが, 全順序でないことを示せ.

**問題 88 (1pt.)** $(X, \leq)$ を順序集合とする．新しい関係 $\leq'$ を $x \leq' y \Leftrightarrow y \leq x$ と定めれば順序となることを示せ.

**問題 89 (1pt.)** $\mathbb{N}$ に関係 $n \leq m \Leftrightarrow n|m$ を定める†．これは順序であるが, 全順序でないことを示せ.

**問題 90 (1pt.)** $n \times n$ 実べき等行列‡ 全体のなす集合を $M_n(\mathbb{R})^{\mathrm{IP}}$ と書く．2 つの行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})^{\mathrm{IP}}$ に対して, 関係を $A \leq B \Leftrightarrow AB = A = BA$ で定めると, 順序であることを示せ．また全順序か?

**問題 91 (1pt.)** 集合 $X$ 上の実数値関数の集合を $F(X)$ と書く．$f, g \in F(X)$ に対して, $f \leq g$ を $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$ と定めると順序になることを示せ．また全順序か?

**問題 92 (1pt.)** 実係数多項式の集合を $\mathbb{R}[x]$ とおく．関係 $f \leq g$ を $\deg(f) \leq \deg(g)$ で定めると§, 順序でないことを示せ.

---

*http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html
†$n|m$ は $n$ が $m$ を割り切ることを意味する.
‡行列 $A$ がべき等 (idempotent) $\Leftrightarrow A^2 = A$.
§$\deg(f) = f$ の次数.

**問題 93 (1pt.)** $\mathbb{R}^n$ に関係 $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\| \le \|\boldsymbol{y}\|$ を定める．これは順序にならないことを示せ.

**問題 94 (積順序, 1pt.)** 2 つの順序集合 $(X, \le_X)$, $(Y, \le_Y)$ があるとする．直積集合 $X \times Y$ 上に次のように関係を入れる．2 元 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して, $(x, y) \le (x', y') \Leftrightarrow x \le_X x'$かつ $y \le_Y y'$. これは順序であることを示せ．全順序とならない例もあげよ.

**問題 95 (辞書式順序, 1pt.)** 2 つの順序集合 $(X, \le_X)$, $(Y, \le_Y)$ があるとする．直積集合 $X \times Y$ 上に次のように関係を入れる．2 元 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対して, $(x, y) \le (x', y') \Leftrightarrow x <_X x'$または $x = x', y \le_Y y'$. これは全順序であることを示せ.

**問題 96 (1pt.)** 辞書式順序 (lexicographic order) はなぜ「辞書式」というのか考えよ.

**問題 97 (1pt.)** $(X, \le)$ を順序集合, $T \subset X$ とする．$T$ に関係 $\le$ を制限すれば, $T$ 上の順序を定めることを示せ.

このように順序集合の部分集合は順序を制限することで, 順序集合となる．これを**順序部分集合**という.

## 7.2 最大元 etc.

**定義 7.1** 順序集合 $(X, \le)$ に対して, 次を定める.

- $a \in X$ が**最大元** (maximum) $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対して, $x \le a$.
- $a \in X$ が**最小元** (minimum) $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対して, $a \le x$.
- $a \in X$ が**極大元** (maximal element) $\Leftrightarrow$ $a < x$ となる $x \in X$ は存在しない.
- $a \in X$ が**極小元** (minimal element) $\Leftrightarrow$ $x < a$ となる $x \in X$ は存在しない.

**問題 98 (1pt.)** 最大 (小) 元は極大 (小) 元であることを示せ.

最大 (小) 元と極大 (小) 元の違いは, 最大 (小) の方は, すべての元と比較可能であることを言っているが, 極大 (小) の方は比較可能なものの内では一番大きいということである.

**問題 99 (1pt.)** 最大 (小) 元は存在すれば, 1 つしかないことを示せ.

**問題 100 (1pt.)** 最大 (小) 元が存在すれば, 極大 (小) 元は最大 (小) 元に一致することを示せ.

**問題 101 (1pt.)** 問題 87 において, 最大元, 最小元, 極大元, 極小元を (存在すれば) すべて求めよ.

**問題 102 (1pt.)** 問題 85 において, 最大元, 最小元, 極大元, 極小元を (存在すれば) すべて求めよ.

**問題 103 (1pt.)** 問題 90 において, 最大元, 最小元, 極大元, 極小元を (存在すれば) すべて求めよ.

**問題 104 (1pt.)** 自然数 $n$ に対して $\mathbb{Z}$ の部分集合 $n\mathbb{Z}$ を問題 6 のように定める．$I := \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく ($n\mathbb{Z} \in I$ に注意). $I$ に包含関係から定まる順序を入れる (問題 85). このとき最大元, 最小元, 極大元, 極小元を (存在すれば) すべて求めよ.

**問題 105 (2pt.)** 上の問題の続きで, $J$ を $I$ から 1 元 $\mathbb{Z}$ をぬいたものとする, つまり $J := I \setminus \{\mathbb{Z}\}$. $J$ に包含関係から定まる順序を入れる (問題 85). このとき最大元, 最小元, 極大元, 極小元を (存在すれば) すべて求めよ.

## 7.3　部分集合の上界 etc.

**定義 7.2** 順序集合 $(X, \leq)$ と部分集合 $S \subset X$ に対して, 次を定める.

- $a \in X$ が $S$ の**上界** (upper bound) $\Leftrightarrow$ 任意の $s \in S$ に対して, $s \leq a$.
- $S$ が**上に有界** (bounded above) $\Leftrightarrow$ $S$ の上界が存在する.
- $a \in X$ が $S$ の**上限** (supremum) $\Leftrightarrow$ $a$ は $S$ の上界かつ, もし $b \in X$ も $S$ の上界ならば $a \leq b$.
- $a \in X$ が $S$ の**下界** (lower bound) $\Leftrightarrow$ 任意の $s \in S$ に対して, $a \leq s$.
- $S$ が**下に有界** (bounded below) $\Leftrightarrow$ $S$ の下界が存在する.
- $a \in X$ が $S$ の**下限** (infimum) $\Leftrightarrow$ $a$ は $S$ の下界かつ, もし $b \in X$ も $S$ の下界ならば $b \leq a$.

上限や下限は $S$ の元とは**限らない**ので注意.

**問題 106 (1pt.)** 上限 (下限) は存在すれば, 1 つしかないことを示せ.

**問題 107 (1pt.)** $\mathbb{R}$ に問題 84 で定まる通常の順序を入れる. $S = \{0\}$ とおく. このとき $S$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ.

**問題 108 (1pt.)** $\mathbb{R}$ に通常の順序を入れる. $S = [0, 1)$ とおく. このとき $S$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ.

**問題 109 (1pt.)** $\mathbb{R}$ に通常の順序を入れる. このとき $\mathbb{Q}$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ.

**問題 110 (1pt.)** $\mathbb{R}^2$ に積順序を入れる. $S = [0, 1) \times [0, 1)$ とおく. このとき $S$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ (図示せよ).

**問題 111 (1pt.)** $\mathbb{R}.^2$ に辞書式順序を入れる. $S = [0, 1) \times [0, 1)$ とおく. このとき $S$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ (図示せよ).

**問題 112 (各 1pt.)** 問題 85 の順序を 3 点集合 $X = \{a, b, c\}$ のときに考える.

(1) $P(X)$ を列挙して, 順序関係が分かるように図示せよ.

(2) $\{\{a\}\}$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ (図示せよ).

(3) $\{\{a\}, \{b\}\}$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ (図示せよ).

(4) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ (図示せよ).

**問題 113 (2pt.)** 問題 89 の順序について, $n, m \in \mathbb{N}$ として $\{n, m\}$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ.

**問題 114 (2pt.)** 問題 90 の順序について, $S = \{E_{ii} \mid i = 1, \ldots, n\}$ とおく¶. $S$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ.

**問題 115 (1pt.)** 問題 104 の順序集合 $I$ を考える. $S = \{n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}\}$ とおく $(n, m \in \mathbb{N})$. $S$ の上界の集合, 上限, 下界の集合, 下限を (存在すれば) 求めよ.

**問題 116 (1pt.)** $(X, \leq)$ を順序集合, $S \subset X$ とする. $S$ の上界の集合を $U(S)$ と書く. $U(S)$ を問題 97 の部分順序集合とみなす. このとき,「$a \in X$ が $S$ の上限 $\Leftrightarrow$ $a \in U(S)$ かつ $a$ は $U(S)$ の最小元」であることを示せ.

---

¶ $E_{ii}$ は $(i, i)$ 成分が 1 で残りは 0 という行列.

## 7.4 整列集合

**定義 7.3** 順序集合 $(X, \leq)$ が**整列集合**であるとは, 任意の空でない部分集合が ($X$ の順序部分集合として) 最小元をもつことをいう.

**問題 117 (1pt.)** 整列集合は全順序集合であることを示せ.

**問題 118 (1pt.)** $\{1, \ldots, n\} (n \in \mathbb{N})$ に自然に順序を入れたものは整列集合であることを示せ.

**問題 119 (1pt.)** $\mathbb{N}$ に自然に順序を入れたものは整列集合であることを示せ.

このように整列集合のイメージは「元が順序通りずらっと並んでいる」というものである. このイメージは大事なので覚えておこう.

**問題 120 (2pt.)** 整列集合の順序を問題 88 のように入れかえて新たに順序集合を作ると, 必ずしも整列集合ではないことを示せ. 入れかえた後も整列集合になるものの例もあげよ.

**問題 121 (1pt.)** $\mathbb{Z}$ に自然に順序を入れたものは整列集合でないことを示せ.

**問題 122 (1pt.)** $\mathbb{Z}$ が整列集合になるように適当な順序を定めよ.

**問題 123 (1pt.)** $\mathbb{Q}$ に自然に順序を入れたものは整列集合でないことを示せ.

**問題 124 (1pt.)** $\mathbb{R}$ に自然に順序を入れたものは整列集合でないことを示せ.

**問題 125 (2pt.)** 2 つの整列集合の直積集合に辞書式順序を入れたものは整列集合であることを示せ.

**問題 126 (1pt.)** 整列集合の部分順序集合は整列集合であることを示せ.

**問題 127 (1pt.)** 整列集合は空でなければ最小元をもつことを示せ.

**問題 128 (1pt.)** $(X, \leq)$ を整列集合とし, $X$ に含まれない $a$ をとり, 合併集合 $X \cup \{a\}$ を整列集合とするように, 自然に順序を定めてみよ.

**問題 129 (各 1pt.)** $\mathbb{N}$ を二つ用意して, 集合を区別するために 1 つ目を $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ と書き, $\mathbb{N}' = \{1', 2', \ldots\}$ と書く.

(1) 合併集合 $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$ に関係 $\leq$ を, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}'$ 上では通常の大小関係, $\mathbb{N}$ の各元は $\mathbb{N}'$ の各元よりも真に小さいという風に入れる. すると, $\leq$ は全順序であることを示せ.

(2) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$ は整列集合であることを示せ.

(3) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$ の最小元を求めよ.

(4) $\mathbb{N}$ の $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$ での上限を求めよ.

$x^n + y^n = z^n$ この方程式に解はない. 私はこれについて真に驚くべき証明を発見したが, 電車が来てしまったので書くことはできない.

ニューヨーク地下鉄駅の落書き

ある数学者はリーマン予想の証明を知るために悪魔に魂を売った. 何週間かたって, 悪魔はやせおとろえてやって来た. “すぐ解けると思ったがだめだ. だがよい補題を証明出来たぞ!”

出自不明