

1 演習の形式と成績評価の方法

この授業では位相空間論の発表形式の演習を行います。問題が出来た人から予約をして順番に黒板で解いてもらいます。原則早いもの勝ちですが、何人かが競った時には発表回数の少ない人の中から選びます。各問題は今学期中有効なので、当日配られた問題の他に、まだ解かれていない古い問題も解くこともできます。

次に成績評価の説明をします。成績は出席数、発表回数、ポイント数から評価します。テストは行いません。単位を取るためにはまず、

- 欠席数が3回以下であること
- 3回以上発表すること

の2つをクリアすることが必要です。またポイント数というのは、各問題についている点数で「1pt」のように表示されています。夏学期が終了してから正確に決定することになっていますが、「1pt=3~4点」で換算し、60点を加えるように思います。たとえば5ptで3点換算なら75点になります。ただし現時点では、この計算はあくまで目安だと考えてください。

発表の仕方について、聴いている人に理解してもらえるように分かりやすく10分くらいで発表してください。またおかしな点があれば積極的に質問をすることを奨励します。よい指摘ならポイントが加算される、かもしれません。

問題は配布後私のweb pageにアップしますから、次のページから数学研究IIAのところに行ってダウンロードもできます。もうすでに解かれた、あるいは予約されている問題のリストもそこにあります。<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html>

2 勉強の仕方

アドバイスというか注意ですが、数学の勉強は講義を聴いて分かったつもりになっても、実際問題にアタックしてみると全く手が動かなかったりするものです(これは経験談)。つまり講義だけで勉強終了モードになるのは危険、もっと言えば間違いなのです。では、よい勉強方法は何かかというと、まず一にも二にもよい本を読むこと。これは講義の内容を先取りしてもいいし、復習してもいいと思います。先取りをするのなら、慣れないうちは「大体分かる」程度でやっというて、分からないところは講義で補う。復習なら講義の内容が「完全に分かる」レベルになろうとしてほしいです。始めのうちはたくさん時間がかかって大変だと感じと思いますが、だんだんと慣れてくるはずです。

本を読むことだけでは問題を解けません。つまり不十分です。次にやるべきことは良問をたくさんこなすことです。問題は本やweb上でたくさん見つかるでしょう。分からなければ答えを見て、もし納得できなければ人に聞くとよいでしょう。

大学ではハイレベルな内容を教えられるわけです。始めから分かる人なんて一人もいません。それどころか分からないところが一杯あるはずです。数学ではうやむやなところが一切ないので、分からない箇所がはっきりする分、勉強はしやすいのです。本を読んでいたとして、ある所で詰まってしまったとします。このときなぜこんなことが言えるのか?と思わなくてはいけません。言葉(定義)を知らないのか、武器(定理、公式)を知らないのか、または武器の使い方(論証)が理解できないのか考えてみます。どうしても分からなければ後日に聞くべきです。とにかく白黒ははっきりさせてやるという意気込みが大事です。この演習を通じて少しは成長したかなと思えるようになってもらいたいです。

3 参考図書

位相空間の本をいくつか思いつくままに書いておきます。すべて読む必要はもちろんありません。せめて2冊は位相空間の本を手元に置いておいて欲しいです。○がついているのは初心者におすすめなものです。どれもよい本だと思います。自分で手に取ってみて、これなら読めるかなという本を選びましょう。

青木利夫	演習・集合位相空間	たくさん問題がついている。
斎藤正彦	数学の基礎 - 集合・数・位相。	厳密な集合論も書いてある。
斎藤毅	集合と位相。	ソフトカバー & A5 版の本。手に馴染みやすい。
○ 志賀浩二	位相への30講。	実は読んだことはないが多分良い本。
○ 松坂和夫	集合・位相入門。	学生の時分読みやすい本だと思った。
○ 森田茂之	集合と位相空間。	必要事項を最小限にまとめた本です。
矢野公一	距離空間と位相構造。	例がたくさん書いてあって助かる本。

4 数学の記号

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ そして $\mathbb{C}$ は各々、自然数 (0 は含まない), 整数, 有理数, 実数そして複素数の集合を表す。つまり

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\},$$

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\},$$

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ は実数}\},$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- 数字だけでなくベクトルも、小文字で書く (x, y, z 等)。

5 集合論の復習

2つの集合 A, B に対して、合併 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$ を次で定義する。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}.$$

ここで「or」は「and」も許すことに注意。

次に集合の包含について。 $A \subset B$ とは、「すべての $x \in A$ に対して $x \in B$ が成り立つこと」を意味する。 $B \supset A$ と書く。 $A = B$ は、 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であることを意味する。 集合の等号を示す場合は、等号をいきなり示すのではなくて2つの包含を示すことが多い。無限個の合併、共通部分も考えられる：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \mid x \in A_n \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \mid x \in A_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}\},$$

問題 1 (各 1pt) 次を示せ (区間の記号はいいですね)。

$$(1) (0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1 - 1/n), \quad (2) \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n), \quad (3) [0, 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1 + 1/n],$$

次に写像について説明しておく。写像は $f: A \rightarrow B$ という風にかく。これは「各点 $x \in A$ に対して、 $f(x) \in B$ が1つだけ定まっている」ことを意味する。

問題 2 (各 1pt) 次の $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への「対応」 f は写像か否か判定せよ.

- (1) 実数 $t \in \mathbb{R}$ を $t^2 \in \mathbb{R}$ に対応させる.
- (2) 実数 $t \in \mathbb{R}$ を二つの数 1 と 0 に対応させる.
- (3) 実数 $t \in \mathbb{R}$ を $t \neq 0$ なら $1/t$ に, $t = 0$ ならば二つの数 1 と 2 に対応させる.
- (4) 実数 $t \in \mathbb{R}$ を $t \in \mathbb{Q}$ ならば 0 に, $t \notin \mathbb{Q}$ ならば 1 に対応させる.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする. $A \subset X$ を部分集合とする. このとき Y の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

を A の f による像とよぶ. A を f で送ったもののことである. 空集合の像は空集合であると定める, つまり $f(\emptyset) = \emptyset$. 次は Y の部分集合 $B \subset Y$ を取る. このとき X の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{a \in X \mid f(a) \in B\}$$

を B の f による逆像 (inverse image) とよぶ. X の元のうち f で送ると B に入るものの集まりである. ここの f^{-1} は単に記号で逆写像の意味を持たない. 空集合の逆像は空集合であると定める, つまり $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

問題 3 (各 1pt) 問題 2 の関数 f に対して, 閉区間 $[0, 1]$ の像 $f([0, 1])$ と, 区間 $[0, \infty)$ の逆像 $f^{-1}([0, \infty))$ を求めよ.

次の問題はしばしば使われる写像と合併, 共通部分そして補集合との重要な関係である.

問題 4 (各 1pt) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. A_1, A_2 を X の部分集合, B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき, 次を示せ.

$$(1). f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad (2). f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

問題 5 (各 1pt) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. A_1, A_2 を X の部分集合, B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき, 次を示せ.

$$(1). f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2), \quad (2). f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

問題 6 (1pt) 問題 5(1) で, 等号が成り立たない例をあげよ.

問題 7 (1pt) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. B を Y の部分集合とすると, 次を示せ:

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$$

包含関係については次が成り立つ.

問題 8 (各 1pt) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 次を示せ:

- (1) A_1, A_2 が X の部分集合であって $A_1 \subset A_2$ ならば, $f(A_1) \subset f(A_2)$.
- (2) B_1, B_2 が Y の部分集合であって $B_1 \subset B_2$ ならば, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

次に写像の合成を定めよう. 二つの写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ があるとする. このとき各 $x \in X$ に対して, Z の元 $g(f(x)) \in Z$ を対応させる写像を f と g の合成写像 (composed map) といって, $g \circ f: X \rightarrow Z$ と書く.

問題 9 (各 1pt) 次の写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ と $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ の合成写像 $g \circ f$ を求めよ:

(1) $f(x) = \exp(x)$, $g(y) = \log(y)$,

(2) $f(x) = |x| + 2$, $g(y) = y + 2$.

(3) $f(x) = x^3$, $g(y) = 1$.

(4) $f(x) = 1$, $g(y) = \log(y)$.

次に写像の性質をいくつか復習する.

定義 5.1 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して次の性質を定める:

- X の異なる 2 元 x, x' に対して, 常に $f(x) \neq f(x')$ となるとき, f は単射 (injective, injection) である* という.
- f の値域が Y と一致するとき, つまり $f(X) = Y$ であるとき, f は全射 (surjective, surjection) であるという.
- f が単射かつ全射ならば, f は全単射 (bijective, bijection) であるという.

問題 10 (各 1pt) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 次を示せ:

(1) f は単射である $\Leftrightarrow$ もし $x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ をみたせば, $x = x'$.

(2) f は全射である $\Leftrightarrow$ 全ての $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

全単射 $f: X \rightarrow Y$ があるとする. 全射性から各 $y \in Y$ に対して, $x \in X$ で $f(x) = y$ をみたすものが存在し, 単射性からそのような x は 1 つしかない. よってこの対応 $y \mapsto x$ は写像を定める. この写像を f の逆写像 (inverse map) という. 次の結果は大変大事であるから憶えておこう.

定理 5.2 次が成り立つ.

- $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への全単射を構成できる ($\mathbb{Q}$ の可算性).
- $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ へは全単射を構成できない ($\mathbb{R}$ の非可算性. Cantor の対角線論法参照).

ここで全単射を作るときによくやる重要なトリックを学ぼう.

問題 11 (2pt) x をある集合の元とする. $\mathbb{N}$ に x をあわせてできる集合 $\{x\} \cup \mathbb{N}$ と $\mathbb{N}$ との間に全単射を構成せよ.

問題 12 (2pt) $\mathbb{R}^2$ の単位円を S^1 と書く, つまり $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. 全単射 $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ を構成せよ.

集合 X の各元 $x \in X$ を $x \in X$ に対応させる写像を $\text{id}_X: X \rightarrow X$ と書き, X の恒等写像とよぶ. これを使うと単射, 全射を写像の言葉で次のように特徴づけられる.

問題 13 (各 1pt) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, 次がなりたつことを示せ:

(1) f は単射である $\Leftrightarrow$ 写像 $g: Y \rightarrow X$ が $g \circ f = \text{id}_X$ となるように存在する.

(2) f は全射である $\Leftrightarrow$ 写像 $g: Y \rightarrow X$ が $f \circ g = \text{id}_Y$ となるように存在する[†].

(3) f は全単射である $\Leftrightarrow$ 写像 $g: Y \rightarrow X$ が $g \circ f = \text{id}_X$ かつ $f \circ g = \text{id}_Y$ となるように存在する[‡].

*全射や全単射と同じく, 「単射」を形容詞 (injective) としても使うし名詞 (injection) としても使う.

[†]選択公理を認めれば同値.

[‡]このときもちろん $g = f^{-1}$ である.