数学 IIA 演習 No.2

4 月 23 日配布
担当：戸松 玲治

5　集合論の復習 つづき

問題 14 (各 1pt) 次を示せ.

$$(1)\ \mathbb{Z} = \{t \in \mathbb{R} \mid \sin(t\pi) = 0\}, \quad (2)\ \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{t \in \mathbb{R} \mid \sin(tn\pi) = 0\}.$$

問題 15 (各 1pt) 次を示せ.

$$(1)\ \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty), \quad (2)\ \{0\} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, \infty)\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, 1/n^3)\right)$$

問題 16 (各 1pt) 次を示せ.

$$(1).\ [0,1] \times [0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1+1/n) \times (-1/n, 1+1/n), \quad (2).\ \mathbb{R} \times [0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] \times [0, 1-1/n).$$

問題 17 (各 1pt) 次を示せ.

$$(1)\ (0,1) \times (0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, 1-1/n) \times [1/n, 1-1/n], \quad (2)\ \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{n} \{(n,m)\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{(n,m)\}.$$

問題 18 (各 1pt) $r > 0$ に対して, $B_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ とおく. 次を示せ.

$$(1)\ \{0\} = \bigcap_{r>0} B_r, \quad (2)\ \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}, \quad (3)\ \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c, \quad (4)\ B_r = \bigcap_{s \geq r} B_s.$$

問題 19 (1pt) 上の問題の B_r について, $\bigcup_{s \leq r} B_s = B_r$ は成り立つか?

問題 20 (1pt) $A, B \subset \mathbb{R}$ とする. $(A \times B)^c = A^c \times B^c$ は成り立つか?

6　実数の性質

6.1　数列

いよいよ位相空間論に入っていく. 位相空間が分かっていない人は, そもそもこの章の内容を理解していない場合が多い. $\mathbb{R}$ のもつ性質を抽象化して距離空間の理論をつくり, さらに抽象化して一般的な位相空間論をやるので, $\mathbb{R}$ の基本的な事柄 (絶対値, 数列の収束) をしっかりとものにすることが大切である. 出てくる問題 (極限計算以外) の内容と結果はすべて記憶しよう.

問題 21 (1pt) 絶対値を取る関数 $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は次をみたすことを示せ. $a, x, y \in \mathbb{R}$ に対して

(1) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$,

(2) $|ax| = |a||x|$,

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

またこれらを用いて $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ を示せ.

数列の基本的な言葉を復習しよう.

定義 6.1 $\mathbb{R}$ の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ [*]に対して（関数 $x\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ のこと）, 次の性質を定義する.

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が**収束列**であるとは, ある $x\in\mathbb{R}$（ただ 1 つに定まる）が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0,$$

すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, もし $n\in\mathbb{N}$ が N より大きければ $|x_n - x| < \varepsilon$ が成り立つ」ことを言う.

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が**コーシー列**であるとは, $\lim_{m,n\to\infty} |x_m - x_n| = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, もし $m,n\in\mathbb{N}$ が N より大きければ $|x_m - x_n| < \varepsilon$ が成り立つ」ことを言う.

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が**有界列**であるとは, 部分集合 $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ が有界なこと, すなわち「ある $M > 0$ が存在して, $|x_n| \le M$ が全ての $n\in\mathbb{N}$ で成り立つこと」を言う.

問題 22 (1pt) 収束列の収束先はただ 1 つに決まることを示せ.

問題 23 (1pt) 数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ はコーシー列であることを示せ.

問題 24 (1pt) 数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ はコーシー列か.

問題 25 (1pt) 数列 $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(k\log k)$ はコーシー列か.

問題 26 (各 1pt) 次を示せ.

(1) 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列 $\Rightarrow$ 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列[†].

(2) 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列 $\Rightarrow$ 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界列.

問題 27 (1pt) 上の問題 (2) の逆は一般に成り立たないことを示せ.

問題 28 (各 1pt) 次の数列の極限を求めよ.

$$(1)\ \frac{\log n}{n},\quad (2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!},\quad (3)\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\log(k+1)},\quad (4)\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

問題 29 (各 1pt) 次の数列の極限を求めよ.

$$(1)\ \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\quad (2)\ \frac{n^3}{a^n}\ (1<a),\quad (3)\ \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,\quad (4)\ \sqrt[n]{n}$$

問題 30 (1pt) 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $x\in\mathbb{R}$ に収束しているならば, $y_n := (x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ も x に収束することを示せ.

問題 31 (1pt) 正数列 a_n に対して, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = a$ であれば, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$ であることを示せ.

問題 32 (1pt) 正数列 a_n に対して, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = a < 1$ であれば, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを証明せよ.

---

[*] $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ とか単に x_n とも書く.

[†] 実は逆も成り立つ.

問題 33 (1pt) 数列 b_n が, $b_n > 0$ かつ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$ をみたしているとする．このとき別の数列 a_n に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$ ならば, 次がいえることを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = c$$

問題 34 (1pt) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}}.$$

問題 35 (1pt) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ は有界単調増加列であることを示せ．またこの収束先を e と書くと, $2 < e < 3$ であることを示せ.

ここで部分列についても復習しておく.

定義 6.2 自然数の値を取る数列 $\{p(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が狭義単調増加（つまり $p(1) < p(2) < \cdots$ ということ）であるとき, 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ から作られる新しい数列 $\{x_{p(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を，数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**部分列**という.

つまり狭義単調増加関数 $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ と関数 $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ の合成関数 $x \circ p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が部分列を与える. 関数 p の取り方によっていろいろな部分列を作ることができる．簡単に言うと, もとの数列をざっと一列に並べておいて, 飛び飛びに数を取っていってできる新しい数列のことである.

問題 36 (1pt) 次は数列 x_n の中から取ってきたものであるが, 部分列の条件を最初の 6 項でクリアしているのはどれか?

(1) $x_3, x_5, x_9, x_{10}, x_{20}, x_{31}, \ldots$, (2) $x_{10}, x_7, x_8, x_{13}, x_{40}, x_{57}, \ldots$, (3) $x_1, x_2, x_{25}, x_{100}, x_{100}, x_{1796}, \ldots$.

次に実数の連続性についての性質を復習する．この定理からいろいろな結論が従う.

定理 6.3 (区間縮小法) 有界閉区間[‡]の列 $I_1, I_2, \ldots$ が単調減少, すなわち $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ となっているとする．このとき次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

(2) $I_n = [a_n, b_n]$ とする．もしも $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば，共通部分はある一点 a からなる: $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. さらにこのとき $a = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ である.

始めは分かりにくいかもしれないので, 言い換えておこう.

問題 37 (1pt) 区間縮小法を使って次を示せ: 数列 a_n, b_n が, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$ を満たしていたとする (すなわち, a_n は広義単調増加, b_n は広義単調減少だとし, 任意の m, n について $a_n \leq b_m$ としておく)．するとある実数 a が, すべての m, n について $a_n \leq a \leq b_m$ となるように存在する.

問題 38 (2pt) 区間縮小法を用いて次の定理を導け[§]:

定理 (ボルツァーノ・ワイヤストラス): 実数の有界列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列をもつ.

[‡] $[a, b]$ という形の集合のこと.

[§] 後 (冬?) で学ぶ事柄であるが, $\mathbb{R}$ の有界閉集合は**コンパクト**であるということを示している.

（ヒント: 有界性から, ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ が成り立つ．$I_0 := [a,b]$ として帰納的に閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ を定める．例えば $I_0 = [a,(a+b)/2] \cup [(a+b)/2, b]$ だから $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はどちらか（両方の可能性もある）に無限回 hit する．無限回 hit する区間を I_1 と定める．）

問題 39 (1pt) コーシー列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{p(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が x に収束しているとする．このとき, 元の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も同じ極限 x に収束する．

無限級数を考えたりすることができるのも, みな次の定理のおかげである．

問題 40 (2pt) 次の定理を示せ[¶](ヒント: 問題 26, 38, 39).

定理 (実数の完備性): 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列である．$\Leftrightarrow$ 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列である．

たとえば問題 23 の級数は収束する．実は次のとても有名な結果が成り立つ (オイラーによる).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

問題 41 (1pt) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束すれば, 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束することを示せ[‖].

問題 42 (1pt) 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ が収束することを示せ.

問題 43 (1pt) 問題 41 の逆は必ずしも成り立たないことを示せ.

問題 44 (各 1pt) 次のいずれかが成り立てば, 正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束することを示せ.

(1) ある $0 < r < 1$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ が成立つ.

(2) ある $0 < r < 1$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $a_{n+1}/a_n \leq r$ が成立つ.

問題 45 (1pt) 正項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ に対して, 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

が存在したとする．もし $t < 1$ ならば $\sum_k a_k$ は収束し, $t > 1$ ならば $\sum_k a_k$ は発散する[**].

問題 46 (1pt) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ は収束するか?

$t = 1$ の場合は収束も発散もありえる.

問題 47 (1pt) 問題 45 において, $t = 1$ のとき級数が収束する例をあげよ.

問題 48 (1pt) 問題 45 において, $t = 1$ のとき級数が発散する例をあげよ.

問題 49 (1pt) 数列 $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n$ は狭義単調減少かつ, $a_n \geq 0$ を示せ．また極限 γ は $1/2 \leq \gamma < 1$ をみたすことを示せ (この γ をオイラーの定数という．$\gamma = 0.5772\cdots$.).

[¶] これも後 (冬?) でやるが, $\mathbb{R}$ が**完備距離空間**であることを示している.

[‖] 絶対収束から収束がでるということ.

[**] これを ratio test という.