数学 IIA 演習 No. 3

5 月 7 日配布
担当：戸松 玲治

7　ノルム空間

7.1　ノルム空間のかんたんな例: $\mathbb{R}^N$

前のセクションで $\mathbb{R}$ のもつ性質, 特に数列の収束について学んできた. 数列の「大きさ」や収束のスピードを制御するのは問題 21 でやった絶対値 $|\cdot|$ であり, 絶対値を評価するいろいろなテクニックも学んだ (まだよく分からない人はもう一度やり直そう).

さてこのセクションでやりいことは, 1 次元でやったことの N 次元化, そしてさらなる一般化である. とは言っても, ほんの少し面倒になるだけである. まず $\mathbb{R}^N$ とはそもそも何だったかを思い出そう.

定義 7.1 N 個の実数の組からなる集合を $\mathbb{R}^N$ と書き, N 次元ユークリッド空間という. すなわち

$$\mathbb{R}^N := \{(x_1, \dots, x_N) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, N\}.$$

$\mathbb{R}^N$ の元 $(x_1, \dots, x_N)$ のことを**ベクトル**とか単に**点**という. $\mathbb{R}^N$ には足し算とスカラー倍の構造が次のように入り, 係数体を $\mathbb{R}$ とするベクトル空間となる:

$$(x_1, \dots, x_N) + (y_1, \dots, y_N) = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N), \quad a(x_1, \dots, x_N) = (ax_1, \dots, ax_N), \quad a \in \mathbb{R}.$$

線形代数では行列の性質の把握の仕方を学んだ (最中?) が, 位相空間で掘り下げるのは **2 点間の距離**である. 距離は中学以来親しんでいるユークリッド距離 (直角三角形の斜辺の長さを使うやつ) で与えよう. ちゃんと定義すると次のようになる.

定義 7.2 各 $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して, 実数 $\|x\|$ を次で与え, x の**ユークリッドノルム** (Euclidian norm) と呼ぶ:

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\Big)^{1/2}.$$

ちなみに $|x_i|^2 = x_i^2$ なのだから $\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2}$ としてももちろんよいが, 複素係数のベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ を考えるときは, $|x_i|^2$ としないと正の値になってくれないので, 両者で通じる表記にした.

問題 50 (1pt) $N = 1, 2, 3$ のとき, $\|x\|_2$ の幾何学的意味 (図的意味) を答えよ.

この問題からも分かるように, $N = 1$ のとき $\|\cdot\|_2$ は絶対値 $|\cdot|$ に他ならない. 数列の挙動を調べるのに使った絶対値は問題 21 の性質をもつが, 実はユークリッドノルムも全く同じ性質をもつ.

問題 51 (1pt) 点に対してユークリッドノルムを取る関数 $\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ は次をみたすことを示せ. 各 $x, y \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$ に対して,

(1) (正値性) $\|x\|_2 \geq 0$,

(2) (非退化性) $\|x\|_2 = 0 \Rightarrow x = 0$,

(3) $\|ax\|_2 = |a|\|x\|_2$,

(4) (三角不等式) $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

またこれらを用いて $\big|\|x\|_2 - \|y\|_2\big| \leq \|x - y\|_2$ を示せ.

問題 52 (各 1pt) $\mathbb{R}^N$ の点 $x=(x_1,\dots,x_N)$ に対して, 次のように定めると問題 51 の 4 つの性質をみたすことを示せ.

$$(1).\ \|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N}|x_i|,\quad (2).\ \|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\Big)^{1/p},\ (1\le p),\quad (3).\ \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le N}|x_i|.$$

$\|\cdot\|_p$ で $p=2$ としたものがユークリッドノルムである.

7.2 ノルム空間の導入と具体例

問題 52 から分かるように $\mathbb{R}^N$ 上にはユークリッドノルムでなくても問題 51 の性質をみたすものもあるし, そもそも $\mathbb{R}^N$ でない別のベクトル空間にもそのようなものが見つかるケースが多い (数学研究基礎や 3 年生でやる L^p 空間など). それで次のように定めておくと便利である.

定義 7.3 $\mathbb{R}$ 上* のベクトル空間 X の各 $x\in X$ に対して実数 $\|x\|$ が定まっており, 次の 4 つの性質をみたすとき, 写像 $\|\cdot\|\colon V\to\mathbb{R}$ を**ノルム** (norm) であるという. また $\|x\|$ のことを x のノルムという. 各 $x,y\in X$, $a\in\mathbb{R}$ に対して,

(1) (正値性) $\|x\|\ge 0$,

(2) (非退化性) $\|x\|=0\Rightarrow x=0$,

(3) $\|ax\|=|a|\|x\|$,

(4) (三角不等式) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

ノルム空間の一般論はこのたった 4 つだけから展開されるので, 4 つとも大事だが特に三角不等式は大事になってくるので覚えておこう (不等式の向きを間違えないように!). 平たく言えば「ノルム=原点からの距離」のことである. ベクトル空間とノルムをセットにして考えるときは, **ノルム空間** (normed space) という. ノルムの記号もはっきり書きたいときは, $(X,\|\cdot\|)$ のように書く. 例えば $(\mathbb{R}^N,\|\cdot\|_2)$ や $(\mathbb{R}^N,\|\cdot\|_1)$ はノルム空間である. 文脈上ノルムを書く必要がないときはわざわざ書かないことも多い. ただ次の問題で見るように, 距離の数値はどのノルムを選ぶかで変わってくるので, **扱っているノルムは一つ固定されたものか**とか**多数考えられる場合はどのノルムを選んでいるか**を常に確認しよう.

問題 53 (1pt) $\mathbb{R}^2$ の点 $x=(1,2)$ に対して, $\|x\|_1,\|x\|_2,\|x\|_\infty$ を求めよ. 幾何学的な意味も答えよ.

非自明な例を一つあげておく. 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数全体を $C[a,b]$ と書く. 関数の足し算, スカラー倍を次のように自然に定義する.

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\quad (af)(t)=af(t),\ f,g\in C[a,b],\ a\in\mathbb{R}.$$

問題 54 (1pt) この演算で $C[a,b]$ がベクトル空間になることを示せ. また 0 ベクトルはどういう関数か.

和を積分に変更することで, $C[a,b]$ には問題 52 のように次のノルムを考えられる.

問題 55 (1pt) 次のものは $C[a,b]$ のノルムであることを示せ.

$$(1).\ \|f\|_1 := \int_a^b|f(t)|\,dt,\quad (2).\ \|f\|_p := \Big(\int_a^b|f(t)|^p\,dt\Big)^{1/p},\ (p\ge 1),\quad (3).\ \|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|.$$

問題 56 (1pt) $C[-\pi,\pi]$ の点 $f(x)=\sin(x)$ を考える. $\|f\|_1$, $\|f\|_2$, $\|f\|_\infty$ を求めよ.

問題 57 (1pt) $C[0,1]$ の点 $f_n(x)=e^{-x/n}$ を考える $(n\in\mathbb{N})$. $\|f_n\|_p$, $\|f_n\|_\infty$ を求めよ.

---

*係数体は $\mathbb{C}$ でもよい. この場合は $a\in\mathbb{C}$ とする.

7.3 点列の収束

ノルム空間の点列の収束を定義したい．それには実数で使った絶対値の記号をノルムの記号に置き換えればよい．実際, $\|x\|$ は原点からの距離[†]を表すのだから $\|x-y\|$ が 2 点 x, y 間の距離を表す．この値が大きければ離れているし, 小さければ近くにあるとイメージできる．もしぴったり 0 になれば, ノルムの非退化性 (定義 7.3) から $x = y$ が結論される．

点列の記法について注意しておく．ベクトル空間 X の中の点列 $\{x_1, x_2, \dots\}$ は $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ や $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書いたり, 誤解の恐れがないときは単に x_n と書いたりもする．もちろん点列とは, 厳密に言えば写像 $x\colon \mathbb{N} \to X$ のことで, 規則性があってもなくてもよい．以後, X はノルム空間を表しノルムを一つ固定して $\|\cdot\|$ と書く．

定義 7.4 ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して次の性質を定義する．

- 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**収束列**であるとは, ある $x \in X$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

  すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $\|x_n - x\| < \varepsilon$ が成り立つ」ことを言う．

- 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー列**であるとは, $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $m, n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ が成り立つ」ことを言う．

- 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**有界列**であるとは, 部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ が有界なこと, すなわち「ある $M > 0$ が存在して, $\|x_n\| \leq M$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ」ことを言う．

これから §6 の一部分を一般化する (すべて一般化できるわけではない)．使うのはノルムの 4 公理のみであるからエッセンスが明確な分, 理解しやすいと思う．

問題 58 (1pt) ノルム空間内の収束列の極限はただ 1 つに決まることを示せ (cf. 問題 22)．

点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 x に収束するとき, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ や $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ とか, 単に $x_n \to x$ とも書く．収束に使っているノルムを明示したいときは, $x_n \overset{\|\,\|}{\to} x$ と書くことにする．

問題 59 (1pt) $\mathbb{R}^N$ のノルム $\|\cdot\|_p$ と $\|\cdot\|_\infty$ には次の関係があることを示せ．

(1) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq N\|x\|_\infty$.

(2) $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

これから次の便利な結果 (最後の言い換えに注目!) が従う．

問題 60 (2pt) x_n $(n = 1, 2, \dots)$ を $\mathbb{R}^N$ 内の点列とする．$x \in \mathbb{R}^N$ とする．次は同値．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (ユークリッドノルムによる収束)．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ($\|\cdot\|_p$ による収束, $p \geq 1$)．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ($\|\cdot\|_\infty$ による収束)．

(4) x_n が x に各成分ごとに収束する．つまり x_n の成分表示を $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^N)$, x の成分表示を $x = (x^1, \dots, x^N)$ とすると, $x_n^1 \to x^1, \dots, x_n^N \to x^N$ $(n \to \infty)$．

[†] 距離の厳密な定義はまた後でやる

つまり, $\mathbb{R}^N$ **(や** $\mathbb{C}^N$**) においての収束するかどうかは, ノルム** $\|\cdot\|_p$ **の選び方によらない.** いくつか計算問題をやってみよう.

問題 61 (1pt) $x_n \in \mathbb{R}^2$ を $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n^{1/n})$ と定めるとき, この点列の極限を求めよ.

問題 62 (1pt) $x_n \in \mathbb{R}^2$ を $x_n = (e^{-1/n}, e^{-n})$ と定めるとき, この点列の極限を求めよ.

問題 63 (1pt) 実数 α に対して 2×2 行列 $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える. 点列 $x_n \in \mathbb{R}^2$ を $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_n := A^{n-1}x_1$ と定める. このとき点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (ユークリッドノルムに関して) 収束するための必要十分条件を求めよ. また収束する場合極限を求めよ.

問題 64 (1pt) 2×2 行列 $B := \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$ を考える. 点列 $x_n, y_n \in \mathbb{R}^2$ を $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_n := B^{n-1}x_1$, $y_n := B^{n-1}y_1$ と定める. このとき x_n と y_n の (ユークリッドノルムに関して) 極限があれば求めよ.

問題 65 (1pt) 2×2 行列 $C := \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$ を考える. 点列 $x_n \in \mathbb{R}^2$ を $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_n := C^{n-1}x_1$ と定める. このとき x_n の (ユークリッドノルムに関して) 極限があれば求めよ.

問題 66 (1pt) ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して次を示せ (cf. 問題 26).

(1) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列 $\Rightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列.

(2) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列 $\Rightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界列.

注意: 問題 66(1) の逆は, $\mathbb{R}^N$ や $\mathbb{C}^N$ なら成り立つが, 一般には成り立たない (cf. 問題 69). すべてのコーシー列が収束列であるノルム空間は**完備** (complete) であると言われる.

問題 67 (1pt) f_n を問題 57 で定めたものとする.

(1) f_n は $\|\cdot\|_p$ に関して収束列であることを示せ. またその極限を求めよ.

(2) f_n は $\|\cdot\|_\infty$ に関して収束列であることを示せ. またその極限を求めよ.

問題 68 (1pt) $f \in C[a,b]$ に対して, $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ を示せ. またもし $f_n \overset{\|\ \|_\infty}{\to} f$ ならば, $f_n \overset{\|\ \|_p}{\to} f$ であることも示せ.

問題 69 (各 2pt) 問題 55 で定められた 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ を考える.

(1) ノルム空間 $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ において, コーシー列だが収束列でないものの例をあげよ.

(2) ノルム空間 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ は完備であること, つまり問題 66(1) の逆が成り立つことを示せ.

このように同じベクトル空間でもノルムの選び方によって収束の様子ががらりと変わってしまうことが起きることは記憶しておこう ($\mathbb{R}^N$ や $\mathbb{C}^N$ ではこういう現象は起きないことが (後で?) 分かる). もう少し後で学ぶ言葉で言えば「ノルムから生じる**位相**が異なる」と説明できる.

これからのメニュー (予定) をまとめておく.

- §7 ノルム空間の続き. ノルム空間 (とくに $\mathbb{R}^N$) の開集合と閉集合.
- §8 距離空間. 距離空間の開集合と閉集合. 連続写像.
- §9 位相空間.