

7 ノルム空間 つづき

7.4 開集合

今回はノルム空間について説明をした。もしこれから「ノルム空間」という文字を見たら、すぐに「あれ」や「これ」がそうだったな、と具体例を2, 3個瞬時に思いつかないといけない。もしできなければ、これ以上進むのは難しい話にならない。さて次の開球を考えることが位相を考えることの第一歩といえる。

記号 $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする。点 $x \in X$ と $r > 0$ に対して、次の X の部分集合を定める：

$$U(x, r) := \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}.$$

この $U(x, r)$ のことを、中心 x 、半径 r の開球 (open ball) とよぶ。

問題 70 (各 1pt) 問題 52 の (1),(2),(3) のノルムについて、 $N = 2$ の時に開球 $U(0, r)$ を図示せよ。

問題 71 (1pt) $C[0, 1]$ に問題 55 のように、 $\sup$ ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を与えてノルム空間にする。次の関数のうち開球 $U(x, 1)$ に含まれるものをすべて選べ。ここで x は $f(x) = x$ となる関数のことである。

$$(1). x^2, \quad (2). e^x, \quad (3). x^3 - 2x, \quad (4). 2x.$$

いくつか開球の基本的な性質をまとめよう。

問題 72 (各 1pt) 次を示せ。

$$(1). \bigcup_{r>0} U(x, r) = X, \quad (2). \bigcap_{r>0} U(x, r) = \{x\}, \quad (3). U(x, r) \subset U(x, s) \text{ if } 0 < r < s.$$

問題 73 (1pt) もし $a_n > 0$ が 0 に収束する数列ならば、 $\bigcap_{n=1}^\infty U(x, a_n) = \{x\}$ であることを示せ。

問題 74 (1pt) 次を示せ。

$$U(x, r) \cap U(y, s) \neq \emptyset. \iff \|x - y\| < r + s.$$

問題 75 (1pt) 開球は凸集合である、つまりもし $a, b \in U(x, r)$, $0 \leq t \leq 1$ であれば、 $ta + (1-t)b \in U(x, r)$ であることを示せ。

さて開集合の定義を与えよう。

定義 7.1 ノルム空間 X の部分集合 A が次の条件を満たすとき開集合 (open set) であるという：

すべての A の点 x に対してある $r > 0$ が、 $U(x, r) \subset A$ を満たすように存在する。

また、空集合は開集合であると決める。

論理式で書けば、 $\forall x \in A, \exists r > 0, U(x, r) \subset A$ となる (半径 r は x と A に依存して決まることがポイント)。まず定義から簡単に分かることをまとめよう。これ以降、 X はノルム $\|\cdot\|$ をもつノルム空間とする。

問題 76 (1pt) 全体集合 X や, すべての開球 $U(x, r)$ は開集合であることを示せ.

問題 77 (1pt) 全体集合 X から 1 点を取り除いた集合は開集合であることを示せ.

問題 78 (1pt) $\mathbb{R}$ において, 开区間は開集合であることを示せ.

問題 79 (1pt) $\mathbb{R}$ の半开区間や閉区間は開集合でないことを示せ.

問題 80 (1pt) $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で開集合でないことを示せ.

問題 81 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において, 開長方形 $(a, b) \times (c, d)$ は開集合であることを示せ (ノルムはユークリッドノルム).

問題 82 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において, 閉長方形 $[a, b] \times [c, d]$ は開集合でないことを示せ (ノルムはユークリッドノルム).

部分集合には, 合併と共通部分という演算がある. 開集合同士こういう演算をやってみて, また開集合になるかどうかが気になる. この疑問に答える次の定理* は非常に重要である.

定理 7.2 X をノルム空間とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $X, \emptyset$ は開集合.
- (2) 有限個の開集合 $V_1, \dots, V_n$ に対して, その共通部分 $V_1 \cap \dots \cap V_n$ は開集合.
- (3) (無限個かもしれない) 開集合族 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, その合併 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ は開集合.

定理の文もそうだが, 何も見ないで証明できるようにならなければいけない. 分からないことを嘆く前に勉強の姿勢に革命を起こそう!

「数学の腕力の鍛え方」

Step 1. 「証明のロジックを理解する」

本に書いてある定理の内容と証明を理解する (理解できなければ一歩前に戻る).

Step 2. 「重要な結果 (道具) を記憶する」

本を閉じて, 定理の内容と証明を紙に自力で書けるようになるまで続ける.

Step 3. 「道具の使用法や勘を養う」

問題を自分で見つけ, これでもかというほどたくさん解く. ある程度のレベルの問題なら「質より量」である.

最低 Step 2 まではこなそう. 一度やってみるとその効果がすぐに現れるはず. 数学は思ったほどつまらなくもないし, 勉強しにくくないことに気づくであろう.

問題 83 (2pt) 定理 7.2 を示せ.

定理 7.2 では, (2), (3) で許される個数の違いに特に注意しよう. (3) は個数に制限はない (連続無限個でも O.K!) が, (2) は有限個しか一般には成り立たないのである. この反例を探そう. まず問題 78, 79 を理解しておこう.

問題 84 (1pt) 一般に無限個の開集合の共通部分は開集合とは限らない. 実際 $\mathbb{R}$ において, 开区間の無限個の共通部分が閉区間になってしまう例を作ることによってこれを確かめよ.

問題 85 (1pt) 空でない開集合は, いくつか (連続無限個でもよい) の開球の合併に書けることを示せ.

*位相空間の理論でいう「開集合系の公理」である.