

7 ノルム空間 つづき

7.5 閉集合

今回はノルム空間の開集合を定めた。今回は閉集合を定める。

定義 7.3 ノルム空間 X の部分集合 F が次の条件を満たすとき閉集合 (closed set) であるという：

補集合 F^c が開集合である。

これ以降 X でノルム空間を表し、 $\|\cdot\|$ をそのノルムとする。

問題 86 (1pt) 全体集合 X と空集合 $\emptyset$ は閉集合であることを示せ。

問題 87 (1pt) 1 点からなる部分集合は閉集合であることを示せ。

問題 88 (1pt) $\mathbb{R}$ において、閉区間は閉集合であることを示せ。

問題 89 (1pt) $\mathbb{R}$ の半開区間や開区間は閉集合でないことを示せ。

問題 90 (1pt) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の中で閉集合であることを示せ。

問題 91 (1pt) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の中で閉集合でないことを示せ。

問題 92 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において、閉長方形 $[a, b] \times [c, d]$ は閉集合であることを示せ (ノルムはユークリッドノルム)。

問題 93 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において、開球 $U(0, r)$ は閉集合でないことを示せ (ノルムはユークリッドノルム)。

定理 7.2 を閉集合の言葉で言い換えると次のようになる*。

定理 7.4 X をノルム空間とする。このとき次が成り立つ。

- (1) $X, \emptyset$ は閉集合。
- (2) 有限個の閉集合 $F_1, \dots, F_n$ に対して、その合併 $F_1 \cup \dots \cup F_n$ は閉集合。
- (3) (無限個かもしれない) 閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、その共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は閉集合。

問題 94 (1pt) 定理 7.4 を示せ。

定理 7.2 と同様に、定理 7.4 では、(2), (3) で許される個数の違いに特に注意しよう。(3) は個数に制限はない (連続無限個でも O.K!) が、(2) は有限個しか一般には成り立たないのである。この反例を探そう。問題 88 を理解しておこう。

問題 95 (1pt) 一般に無限個の閉集合の合併は閉集合とは限らない。実際 $\mathbb{R}$ において、閉区間の無限個の合併が開区間になってしまう例を作ることによってこれを確かめよ。

*位相空間の理論でいう「閉集合系の公理」である。

さて、与えられた部分集合が閉かどうかを判断するのに、補集合を求める定義通りのやり方は割と面倒くさいことが多い。次の点列による便利な判定方法である。

定理 7.5 X をノルム空間とし、 F をその部分集合とする。このとき次は同値。

- (1) F は閉集合である。
- (2) もし点列 $x_n \in F$ が $x \in X$ に収束していたら、つねに $x \in F$ である。

ここで x_n が「 F 中の点列」であることに注意。閉でない集合だと、自分の中から外側に飛び出していく点列を取れるのだが、閉集合だといつも極限は F に入っているということである。

問題 96 (2pt) 定理 7.5 を示せ。

問題 97 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 86 を解け。

問題 98 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 87 を解け。

問題 99 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 88 を解け。

問題 100 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 89 を解け。

問題 101 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 90 を解け。

問題 102 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 91 を解け。

問題 103 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 92 を解け。

問題 104 (1pt) 定理 7.5 を用いて、問題 93 を解け。

定義 7.6 点 $x \in X$ と $r > 0$ に対して、次の部分集合を定める：

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\}.$$

$B(x, r)$ を中心 x 、半径 r の閉球 (closed ball) とよぶ (等号込みであることに注意! cf. $U(x, r)$).

問題 105 (1pt) 閉球は閉集合であることを示せ。

問題 106 (1pt) 問題 105 と定理 7.5 を用いて、1 点が閉集合であることを示せ (cf. 問題 87).

ところで $\mathbb{R}^n$ には問題 52 で定めたように違うノルムがたくさんある。開集合や閉集合の定義はノルムの取り方に見よっているが、たちのよい取り替えの場合、ある集合が開 (閉) 集合であるという性質は保たれることを見よう (つまりこの場合、どのノルムを使って、開集合であることを示してもよいということ)。

問題 107 (1pt) ベクトル空間 X に 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ があるとする。次の条件 (1) は (2) を導くことを示せ。

- (1) $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値なノルムである。すなわち、ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して、 $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$ がすべての $x \in X$ に対して成り立つ。
- (2) 部分集合 U がノルム $\|\cdot\|_1$ に対して開集合であれば、ノルム $\|\cdot\|_2$ に関してもそうである。また逆も言える。

問題 108 (2pt) 問題 107 の逆、(2) $\Rightarrow$ (1) も成り立つことを示せ。

問題 109 (1pt) $\mathbb{R}^n$ に問題 52 で定めたノルム $\|\cdot\|_p$ を与える ($p \geq 1$)。部分集合が開集合であるという性質は、 $p \geq 1$ の取り方によらないことを示せ (cf. 問題 59)。