

8 距離空間

8.1 距離関数

我々は $\mathbb{R}^N$ からスタートして位相空間論を構築する過程を学んでいる。前回までノルム空間について学んできたが、今回はさらに抽象化して距離空間を学び始める。位相空間の定義に入る前に距離空間をしっかりとものにしておいてほしい。距離空間とはおおざっぱに言うと「二点間の距離を測れる空間」のことである。ただし距離という概念もちゃんと定義する必要がある。

定義 8.1 X を集合とする。2変数関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が距離関数 (metric function) とは、次の3つの条件を満たすときにいう。任意の $x, y, z \in X$ に対して、

- (1) (正值性) $d(x, y) \geq 0$;
- (2) (非退化性) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- (3) (対称性) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (4) (三角不等式) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

このとき、組 (X, d) を距離空間という。

距離空間の土台の空間には、足し算などの演算は一切仮定されておらず、各点の間の「距離」が与えられているだけであることに注意! 距離空間の典型的な例がノルム空間である。

問題 110 (1pt) $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする。 $d(x, y) := \|x - y\|$ は距離関数であることを示せ。

だから今までやってきたノルム空間、 $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ や $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ などを距離空間として考えることもできるのである。もちろんノルム空間でない距離空間も存在する。

問題 111 (1pt) (X, d) を距離空間とする。 $A \subset X$ に対して、新しい関数 $d_A: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ を $d_A(x, y) := d(x, y)$ と定めれば、 (A, d_A) は距離空間であることを示せ。

たとえば $\mathbb{R}^N$ の部分集合を1つとってくれば、どれだけ変な形でも自然に距離空間となるわけである。これがノルム空間でない距離空間の1つの与え方である。もう1つ面白い例を見てみよう。整数の集合 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の部分距離空間としての構造をもつが ($d(x, y) = |x - y|$ とする)、別の距離関数も存在する。 p を素数とする。各 $x \in \mathbb{Z}$ は、因数分解されて一意的に $x = p^n y$, y は p と互いに素、という形に表せる。このとき $|x|_p := 1/p^n$ と定める。この写像 $|\cdot|_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を p 進付値とよぶ (ℓ^p ノルム $\|\cdot\|_p$ と似た記号なので注意)。

問題 112 (1pt) p 進付値は次の性質をもつことを示せ。

- (1). $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, (2). $|xy|_p \leq |x|_p |y|_p$, (3). $|-x|_p = |x|_p$, (4). $0 \leq |x|_p \leq 1$.

問題 113 (1pt) $d_p(x, y) = |x - y|_p$ とおくと、 $(\mathbb{Z}, d_p)$ は距離空間であることを示せ。

もちろん $\mathbb{Z}$ はベクトル空間ではないから、これはノルム空間でなく距離空間である例である。距離関数の理解を深めるために次の問題をやってみよう。

問題 114 (1pt) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の次の関数 d が距離関数であるかどうかを判定せよ. $x, y \in \mathbb{R}$ とする.

(1). $d(x, y) = x - y$, (2). $d(x, y) = |x^2 - y^2|$, (3). $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ (f は単射な関数).

既知の距離空間から新しい距離空間を作る一つの方法に直積がある.

問題 115 (1pt) $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ を距離空間とする. 直積集合 $X_1 \times X_2$ 上の 2 点 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対して $d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ と定めると, d は距離関数であることを示せ. 組 $(X_1 \times X_2, d)$ を直積距離空間という.

8.2 点列

距離空間では $\mathbb{R}^N$ と同様に点列の収束を考えることができる点にある. 後にやる連続写像なども, 点列の言葉を用いて表すととても簡単である. とにかく重要である.

定義 8.2 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して次の性質を定義する.

- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列であるとは, ある $x \in X$ が存在して, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $d(x_n, x) < \varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列であるとは, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $m, n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界列であるとは, 部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ が有界なこと, すなわち「ある $M > 0$ とある点 z が存在して, $d(x_n, z) \leq M$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ でなりたつ」ことを言う.

問題 116 (1pt) 収束列の極限はただ 1 つに定まることを示せ.

問題 117 (1pt) 収束列はコーシー列であることを示せ.

問題 118 (1pt) コーシー列は有界列であることを示せ.

問題 119 (1pt) 問題 113 の $(\mathbb{Z}, d_p)$ において, 点列 $x_n := 1 + p^2 + \cdots + p^{2n}$ はコーシー列だが, 収束列でないことを示せ (cf. 問題 40).

問題 120 (1pt) 直積距離空間 $(X_1 \times X_2, d)$ において, $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ であることと $a_n \rightarrow a$ かつ $b_n \rightarrow b$ であることは同値であることを示せ.

8.3 開集合と閉集合

ノルム空間と同じように開球を導入する.

記号 (X, d) を距離空間とする. 点 $x \in X$ と $r > 0$ に対して, 次の X の部分集合を定める:

$$U(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

この $U(x, r)$ のことを, 中心 x , 半径 r の開球 (open ball) とよぶ.

開集合, 閉集合の定義もノルム空間と同様である.

定義 8.3 距離空間 (X, d) の部分集合 A が次の条件を満たすとき開集合 (open set) であるという:

すべての A の点 x に対してある $r > 0$ が、 $U(x, r) \subset A$ を満たすように存在する.

また、空集合は開集合であると決める.

定義 8.4 距離空間 (X, d) の部分集合 A の補集合 A^c が開集合であるとき、 A を閉集合であるという.

問題 121 (1pt) 閉球 $B(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$ は閉集合であることを示せ.

ノルム空間同様、次の定理が言えるので距離空間は位相空間である.

問題 122 (1pt) 距離空間の開集合たちも、定理 7.2 と同じ性質をもつことを示せ.

問題 123 (1pt) 距離空間の閉集合たちも、定理 7.4 と同じ性質をもつことを示せ.

定理 7.5 の一般化もできる.

問題 124 (1pt) 閉集合を特徴づけた定理 7.5 は距離空間に対しても成り立つことを示せ.

8.4 連続写像・連続関数

位相空間論で最も重要な概念である「連続性」を 2 通り定義しよう.

定義 8.5 (X, d_X) , (Y, d_Y) を距離空間とする.

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ が点列連続 (sequentially continuous) とは、もし $x_n \rightarrow x$ ならば、つねに $f(x_n) \rightarrow f(x)$ であることをいう.
- 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続 (continuous) とは、もし $U \subset Y$ が Y の開集合ならば、逆像 $f^{-1}(U) \subset X$ はつねに X の開集合であることをいう.

点列連続性は、 $\lim$ の記号を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) (= f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n))$$

と書ける. つまり「 f と $\lim$ が交換する」ということで、とても自然である. 他方 2 つ目の連続性の方は開集合の話で少し分かりづらいかもしれない. しかし実際はこれらは全く同値な概念である.

定理 8.6 点列連続性と連続性は同値な概念である.

与えられた写像の連続性をチェックするには、どちらもよく使うので覚えておこう.

問題 125 (2pt) 定理 8.6 を示せ.

問題 126 (1pt) $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は次の意味で連続であることを示せ.

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \implies d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

以後 $\mathbb{R}$ を距離空間と見るときは、つねに $d(x, y) = |x - y|$ とする.

問題 127 (1pt) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = 0$ ($x \leq 0$), $f(x) = 1$ ($x > 0$) と定めると、 f は連続でないことを示せ.

問題 128 (1pt) (X, d_X) , (Y, d_Y) , (Z, d_Z) を距離空間とし、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を連続写像とすると、合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も連続であることを示せ. また点列連続性を示すことでも示せ.

問題 129 (1pt) (X, d) を距離空間、 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数、 $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき、和 $f + g$, 積 fg , スカラー倍 αf も連続であることを示せ.