数学 IIA 演習 No. 7

7 月 2 日配布
担当：戸松 玲治

8　距離空間

8.4　連続写像・連続関数 つづき

以下では、距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) を考える。

問題 130 (1pt) 写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるためには、次が必要十分であることを示せ。

任意の $\varepsilon > 0$ と $x \in X$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して $f(U_X(x, \delta)) \subset U_Y(f(x), \varepsilon)$.

問題 131 (1pt) $(X \times Y, d)$ を問題 115 で定めた直積距離空間とする。$f\colon X \times Y \to X$ を $f(x, y) = x$ で定めると、連続であることを示せ。

問題 132 (1pt) もし写像 $f\colon X \to Y$ が、ある $C > 0$ に対して $d_Y(f(x), f(y)) \le C d_X(x, y)$ をみたすとすれば、f は連続であることを示せ。

問題 133 (1pt) $\mathbb{R}^n$ にユークリッドノルムから入る距離を入れる。すべての線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は連続であることを示せ。

問題 134 (2pt) $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とし、$T\colon X \to Y$ を線型写像とする。次が同値であることを示せ。

(1) T は連続である。

(2) T は有界である。すなわちある $C > 0$ が存在して、すべての $x \in X$ に対して $\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$ をみたす。

8.5　内点、触点、集積点

定義 8.1 (X, d_X) を距離空間、A を X の部分集合とする。

- 点 $x \in X$ が A の**内点**であるとは、$x \in A$ かつ, ある $\varepsilon > 0$ が $U(x, \varepsilon) \subset A$ となるように存在することをいう。
- 点 $x \in X$ が A の**触点**であるとは、点列 $a_n \in A$ が $a_n \to x$ となるように存在することをいう。
- 点 $x \in X$ が A の**集積点**であるとは、点列 $a_n \in A \setminus \{x\}$ が $a_n \to x$ となるように存在することをいう。
- もし A の点 x が集積点でないならば, 点 x を A の**孤立点**という.

問題 135 (1pt) 点 $x \in X$ が $A \subset X$ の触点であるには、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ であることが必要十分であることを示せ。

記号　A の内点の集合を A°, 触点の集合を $\overline{A}$ と書く。それぞれ A の**内部**, A の**閉包**と呼ぶ。

A°、$\overline{A}$ の性質を調べよう。

問題 136 (2pt) $A \subset X$ とする。

(1) $A^\circ \subset A$ を示せ。

(2) A° は開集合であることを示せ。

(3) A° は A に含まれる開集合のうちで最大のものであることを示せ。

問題 137 (2pt) $A \subset X$ とする。

(1) $A \subset \overline{A}$ を示せ。

(2) $\overline{A}$ は閉集合であることを示せ。

(3) $\overline{A}$ は A を含む閉集合のうちで最小のものであることを示せ。

問題 138 (1pt) $\mathbb{R}^2$ においていつものようにユークリッド距離を与える。集合 A を次で定めるとき、その内部、閉包、集積点の集合を求めよ。

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\} \cup \{(1/n, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

問題 139 (1pt) $\mathbb{R}^2$ においていつものようにユークリッド距離を与える。集合 A を次で定めるとき、その内部、閉包、集積点の集合を求めよ。

$$A = \{(x, \sin(x)) \mid x \in (0, \pi)\}.$$

問題 140 (1pt) $\mathbb{R}$ において, 次の集合 A の $A^\circ, \overline{A}$, 集積点の集合を求めよ. (1) $A = \{x_0\}$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. (2) $A = (0, 1)$. (3) $A = \mathbb{Q}$. (4) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

問題 141 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において, 次の集合 A の $A^\circ, \overline{A}$, 集積点の集合を求めよ. (1) $A = \{(x_0, y_0)\}$ $((x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2)$. (2) $A = (0, 1) \times [0, 1)$. (3) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

これを次のように一般化して整理しておこう.

問題 142 (1pt) 距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2) に対して, $(X_1 \times X_2, d)$ を直積距離空間とする。部分集合 $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ に対して, $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$ が成り立つことを示せ.

閉包と内部との間には次のような関係がある.

問題 143 (1pt) $A \subset X$ を部分集合とするとき次を示せ.

$$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c, \quad A^\circ = (\overline{A^c})^c.$$

問題 144 (1pt) $A, B \subset X$ を部分集合とするとき、次が成り立つことを示せ.

$$(1)\ (A^\circ)^\circ = A^\circ. \quad (2)\ (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ. \quad (3)\ X^\circ = X. \quad (4)\ A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ.$$

問題 145 (1pt) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. すると $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ であった (前問 (3)). これに対して $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ は成り立つが, 等式 $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成り立たない. この等式が成り立たない例を $\mathbb{R}^2$ で構成せよ.

問題 146 (1pt) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. 次が成り立つことを示せ.

$$(1)\ \overline{\overline{A}} = \overline{A}. \quad (2)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (3)\ \overline{\emptyset} = \emptyset. \quad (4)\ A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}.$$

問題 147 (1pt) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. すると $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ であった (前問 (2)). これに対して $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ は成り立つが, 等式 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ は一般には成り立たない. この等式が成り立たない例を $\mathbb{R}$ で構成せよ.

8.6　外部、境界などなど

距離空間の部分集合に対して, その閉包, 内部を定義してきた. 次に外部 (exterior), 境界 (boundary) を定義しよう.

定義 8.2 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

- A の**外部** $\operatorname{ext} A$ を次で定義する.
$$\operatorname{ext} A = X \setminus \overline{A}.$$
$\operatorname{ext} A$ に含まれる点を A の**外点**とよぶ。

- A の**境界** ∂A を次で定義する.
$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$
∂A に含まれる点を A の**境界点**とよぶ。

閉包等を図示して視覚的に理解しよう. 以下 $\mathbb{D}$ は閉円盤 $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を表す.

問題 148 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 閉円盤 $\mathbb{D}$ を考える. $\mathbb{D}$ の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 149 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \{(1, 0)\}$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 150 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \{(0, 0)\}$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 151 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 152 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{R}^2$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 153 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 点 $x \in X$ に対して, 次は同値であることを示せ.

(1) x は A の孤立点である.

(2) $x \in A$ でありかつ, ある $r > 0$ が存在して, $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

問題 154 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 155 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 156 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \mathbb{Q}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 157 (5pt.) $\mathbb{R}^2$ において, $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 158 (5pt.) $\mathbb{R}^2$ において, $A := \{(x, \tan(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < \pi/2\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 159 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \mathbb{Z}$ と定める. A の任意の点は孤立点であることを示せ.

問題 160 (5pt.) $\mathbb{R}^N$ において, $A := \mathbb{Z}^N = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{Z}\}$ と定める. A の任意の点は孤立点であることを示せ.

問題 161 (5pt.) 距離空間 (X, d) において, 有限部分集合 A を考える. A のすべての点は孤立点であることを示せ.

問題 162 (1pt)

問題 163 (1pt)

問題 164 (1pt)