

数学 IIA 演習 No.2

4月17日配布

担当：戸松 玲治*

N 個の実数の組からなる集合を $\mathbb{R}^N$ と書き, N 次元ユークリッド空間という. すなわち $\mathbb{R}^N := \{(x_1, \dots, x_N) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}$. 足し算とスカラー倍を成分ごとに行うことで自然に定義できるため, $\mathbb{R}^N$ はベクトル空間となる. さて写像 $(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める.

$$(x, y) := \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

問題 11. (5pt.) 写像 $(\cdot, \cdot)$ は次の性質をもつことを示せ. $a \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{R}^N$ とすると,

- (1) (正値性&非退化性) $(x, x) \geq 0$ であり, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (2) (対称性) $(x, y) = (y, x)$
(3) $(ax, y) = a(x, y)$ (4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

一般に上の (1) から (4) の性質をもつ写像 $(\cdot, \cdot)$ のことを (実数値) 内積という.

性質 (1) から (x, x) の平方根を取れる. これを $\|x\|$ と書く. つまり $\|x\| := (x, x)^{1/2}$. もし $N = 1$ なら, $\|x\| = |x_1|$ なので $\|x\|$ は絶対値の一般化と考えられる.

問題 12. (5pt.) 写像 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ は次の性質をもつことを示せ. $a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^N$ とすると,
(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ (3) (三角不等式) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

一般に上の (1) から (3) の性質をもつ写像 $\|\cdot\|$ のことをノルムという.

問題 13. (5pt.) $x, y \in \mathbb{R}^N$ とすると, 次が成り立つことを示せ (中線定理).

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

次のように内積をノルムで書くこともできる.

問題 14. (5pt.) $x, y \in \mathbb{R}^N$ とすると, 次が成り立つことを示せ (偏極等式).

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

問題 15. (5pt.) $x, y \in \mathbb{R}^N$ とすると, 次が成り立つことを示せ (Cauchy-Schwarz 不等式†).

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

実数の収束を絶対値によって定義したように, ベクトル (単に点ともいう) の収束をノルムによって定義しよう. $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_1, x_2, \dots\}$ を $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と書く. 点列とは関数 $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ のことである.

定義 0.1 $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して次の性質を定義する.

- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列であるとは, ある $x \in \mathbb{R}^N$ (ただ 1 つに定まる) が存在して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $\|x_n - x\| < \varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ がコーシー列であるとは, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $m, n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ が有界列であるとは, 部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^N$ が有界なこと, すなわち「ある $M > 0$ が存在して, $\|x_n\| \leq M$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ でなりたつ」ことを言う.

*website: <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2a/m2a.html>

†Cauchy-Bunyakovski-Schwarz 不等式ともいう

問題 16. (各 5pt.) $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して次を示せ.

- (1) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列 $\Rightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列. (逆も成り立つ. 問題 19 参照.)
- (2) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列 $\Rightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界列.

点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が点 x に収束するとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ とか $x_n \rightarrow x$ と書く.

問題 17. (各 5pt.) $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と点 x をとる. それらの成分表示を $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$ とおく (ここでは肩の数は添え字であり何乗するかを示す巾のことではない). このとき次を示せ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow$ 任意の $k = 1, 2, \dots, N$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = x^k, \forall k = 1, 2, \dots, N$.
- (2) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列 $\Leftrightarrow$ 任意の $k = 1, 2, \dots, N$ に対して, 数列 $\{x_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列.
- (3) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界列 $\Leftrightarrow$ 任意の $k = 1, 2, \dots, N$ に対して, 数列 $\{x_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界列.

部分列も数列の場合と同様に定義される.

定義 0.2 自然数の値を取る数列 $\{p(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ が狭義単調増加であるとき, $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ から作られる新しい点列 $\{x_{p(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ を, 数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列という.

問題 18. (5pt.) 問題 3, 17-(3) を利用して次を示せ.

定理[‡]: $\mathbb{R}^N$ の有界列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束部分列をもつ.

問題 19. (5pt.) 次を示せ.

定理[§]: $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束列である. $\Leftrightarrow \mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列である.

($\Rightarrow$ は問題 16-(1) なので, ここでは $\Leftarrow$ を示すこと. 問題 5, 17-(1),(2) を利用せよ.)

問題 20. (各 5pt.) $N = 2$ の時を考える. 実数 α に対して行列 $A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える. $x_1 := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $x_n := A^{n-1}x_1$ と定める. このとき

- (1) x_n の成分表示を求めよ.
- (2) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束するための必要十分条件を求めよ. また収束する場合の収束先を求めよ.

問題 21. (各 5pt.) A を $N \times N$ 行列, A^t をその転置行列とする. 次を示せ. $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ とする.

- (1) 任意の $y \in \mathbb{R}^N$ に対して $(x, y) = (z, y)$ が成り立つ $\Leftrightarrow x = z$.
- (2) $(Ax, y) = (x, A^t y)$.
- (3) $A^t = A \Leftrightarrow$ 任意の $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して $(Ax, y) = (x, Ay)$ が成り立つ.
- (4) $A^t A = 1 \Leftrightarrow$ 任意の $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して $(Ax, Ay) = (x, y)$ が成り立つ.

上の (3) を満たす行列を実対称行列, (4) を満たす行列を直交行列と呼ぶ.

問題 22. (5pt.) (おまけ) A, B を $N \times N$ 行列とする. もし $AB = 1_N$ ならば $BA = 1_N$ であることを示せ (左右逆元的一致). ここで 1_N は単位行列をあらわす.

[‡] $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合はコンパクトであるということ.

[§] $\mathbb{R}^N$ が完備距離空間であるということ.