数学 IIA 演習 No.3

4 月 24 日配布
担当：戸松 玲治*

$\|\cdot\|$ を前回やったノルムとする, すなわち $x=(x_1,\dots,x_N)$ に対して $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$ としたのであった. 2 点 $x,y\in\mathbb{R}^N$ に対して $d(x,y):=\|x-y\|$ と定める.

問題 23. (5pt.) 写像 $d\colon \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to[0,\infty)$ は次の性質をもつことを示せ. $x,y,z\in\mathbb{R}^N$ とすると, (1) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, (2)（対称性）$d(x,y)=d(y,x)$, (3)（三角不等式）$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

一般に上の (1) から (3) の性質をもつ写像 d のことを**距離関数**という. これまでは $\mathbb{R}^N$ を扱ってきたが, 内積, ノルムそして距離を次のように抽象化できる. ここで諸概念をまとめておこう.

定義 0.1 X をある集合とする.

- X が実ベクトル空間であり（無限次元でもよい）, ある写像 $(\cdot,\cdot)\colon X\to\mathbb{R}$ が問題 11 の (1) から (4) の性質を満たすとき, $(\cdot,\cdot)$ を**内積**という. 組 $(X,(\cdot,\cdot))$ を**実計量ベクトル空間**という.
- X が実ベクトル空間であり（無限次元でもよい）, ある写像 $\|\cdot\|\colon X\to[0,\infty)$ が問題 12 の (1) から (3) の性質を満たすとき, $\|\cdot\|$ を**ノルム**という. 組 $(X,\|\cdot\|)$ を**実ノルム空間**という.
- ある写像 $d\colon X\times X\to[0,\infty)$ が問題 23 の (1) から (3) の性質を満たすとき, d を**距離関数**という. 組 (X,d) を**距離空間**という.

距離空間はベクトル空間でなくてもよいことに注意. また距離関数が何か明らかなときは, 単に X は距離空間であるという言い方もする.

内積が与えられれば問題 12 と同じ証明で, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ がノルムを与えることが分かるし, ノルムが与えられれば $d(x,y)=\|x-y\|$ とすることで距離関数が得られる. つまり次が分かる.

$$\text{実計量ベクトル空間} \Rightarrow \text{実ノルム空間} \Rightarrow \text{距離空間}.$$

問題 24 (各 5pt.) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の次の関数 d が距離関数であるかどうかを判定せよ. $x,y\in\mathbb{R}$ とする.

(1) $d(x,y)=x-y$.

(2) $d(x,y)=x^2+y^2$.

(3) $d(x,y)=|x^2-y^2|$.

(4) $d(x,y)=|x^3-y^3|$.

(5) $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$, $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は単射な関数.

今までやってきた $\mathbb{R}^N$ は距離空間の典型例である. $\mathbb{R}^N$ で考えてきたことを距離空間に一般化しよう. (X,d) を距離空間とする. 点列とは関数 $x\colon\mathbb{N}\to X$ のことである.

定義 0.2 X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して次の性質を定義する.

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**収束列**であるとは, ある $x\in X$（ただ 1 つに定まる）が存在して, $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$, すなわち「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, もし $n\in\mathbb{N}$ が N より大きければ $d(x_n,x)<\varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー列**であるとは, $\lim_{m,n\to\infty} d(x_m,x_n)=0$, すなわち「任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, もし $m,n\in\mathbb{N}$ が N より大きければ $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.

---
*website: http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2a/m2a.html

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**有界列**であるとは, 部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ が有界なこと, すなわち「ある $M > 0$ とある点 z が存在して, $d(x_n, z) \leq M$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ でなりたつ」ことを言う.

問題 25. (5pt.) (X, d) を距離空間, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の点列とする. 次が同値であることを示せ.

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である.

(2) 任意の点 $z \in X$ に対して, ある $M > 0$ が存在して $d(x_n, z) \leq M$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ でなりたつ.

問題 26. (各 5pt.) 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して次を示せ.

(1) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列 $\Rightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列. **(逆は一般には成り立たない.)**

(2) 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列 $\Rightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界列.

点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 x に収束するとき, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ とか $x_n \to x$ と書く. 上で注意したように, 一般にはコーシー列でも収束列でない場合がある. それゆえコーシー列がいつも収束するというのは, とてもよい性質である. これを完備性というが, 次でちゃんと定義しておこう.

定義 0.3 距離空間 (X, d) の任意のコーシー列が収束列であるとき, (X, d) を**完備距離空間**という†.

問題 27. (5pt.) 半開区間 $[0, 1)$（距離は $d(x, y) = |x - y|$）は完備でないことを示せ.

問題 28. (5pt.) 閉区間 $[0, 1]$（距離は $d(x, y) = |x - y|$）は完備あることを示せ.

問題 29. (5pt.) 有理数の集合 $\mathbb{Q}$（距離は $d(x, y) = |x - y|$）は完備でないことを示せ.

問題 30. (各 5pt.) (X_1, d_1), (X_2, d_2) を距離空間とする. 直積集合 $X_1 \times X_2$ 上の 2 点 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対して $d(x, y) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$ と定める. このとき次を示せ.

(1) $(X_1 \times X_2, d)$ は距離空間である.

(2) (X, d) が完備である $\Leftrightarrow$ (X_1, d_1), (X_2, d_2) の両方が完備である.

定義 0.4 (X, d) を距離空間とすると, 部分集合 $Y \subset X$ に距離関数 d を制限することで距離空間 (Y, d_Y) が作られる（つまり $d_Y(x, y) := d(x, y)$, $x, y \in Y$）. これを**部分距離空間**という.

問題 31. (10pt.) (X, d) を完備距離空間, Y を X の部分距離空間とする. 次の同値性を示せ.

(1) Y は完備である.

(2) もし Y の点列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が, X の点 x に収束していれば, $x \in Y$ である‡.

さてベクトル空間の話に戻ろう.

定義 0.5 完備な実計量ベクトル空間を**実 Hilbert 空間**, 完備なノルム空間を **Banach 空間**という.

こういう空間は無限次元の場合が興味深いのであるが, それらの典型的な例が次の ℓ^p **空間**である. $1 \leq p < \infty$ とし, 集合 $\ell^p_{\mathbb{R}}$ と写像 $\|\cdot\|_p \colon \ell^p_{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$ を次で定める:

$$\ell^p_{\mathbb{R}} := \{x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

問題 32. (5pt.) $p \geq 1$ のとき, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \ell^p_{\mathbb{R}}$ に対して, 2 つの関数 $x + y$, $\alpha x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を $(x + y)_n := x_n + y_n$, $(\alpha x_n) := \alpha x_n$ によって定めれば, $x + y$, $\alpha x \in \ell^p_{\mathbb{R}}$ であることを示せ（つまり $\ell^p_{\mathbb{R}}$ はベクトル空間となる）. (Hint: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p)$ が成り立つ.)

---

†任意の距離空間 X は完備距離空間 $\widetilde{X}$ に（等長かつ稠密に）埋め込むことができることが知られている（完備化という）.
‡$Y \subset X$ が**閉部分集合**であるということ.

問題 33. (10pt.) $p=1$ のとき, $(\ell^1_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_1)$ が完備ノルム空間であることを示せ（$\|\cdot\|_1$ がノルムであることと, 完備性を示すこと）.

問題 34. (5pt.) $p>1$ のとき, $q := p/(p-1)$ とおく（$p^{-1}+q^{-1}=1$ を満たす）. このとき任意の $\alpha, \beta \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ (Young の不等式):

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

問題 35. (5pt.) $p>1$ のとき, $q := p/(p-1)$ とおく. このとき $x \in \ell^p_{\mathbb{R}}$, $y \in \ell^q_{\mathbb{R}}$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ（**Hölder の不等式**）:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

問題 36. ((1):5pt, (2):10pt.) $p>1$ のとき, 次を示せ.

(1) 三角不等式 $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ がなりたつことを示せ[§] (Hint: Hölder の不等式を用いよ).

(2) $(\ell^p_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_p)$ は完備ノルム空間であることを示せ.

問題 37. (5pt.) $x, y \in \ell^2_{\mathbb{R}}$ に対して写像 $(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ を定める（Hölder の不等式により無限和が発散しないことに注意）. このとき $(\cdot,\cdot)$ が内積となること, そして $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)}$ を示せ.

ℓ^p 空間は $p=\infty$ の時も考えられる:

$$\ell^\infty_{\mathbb{R}} := \{x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}, \quad \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

問題 38. (10pt.) 次を示せ.

(1) $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ はベクトル空間であること（和, スカラー倍は問題 32 のもの）.

(2) $\|\cdot\|_\infty$ はノルムであること.

(3) $(\ell^\infty_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_\infty)$ は完備であること.

以上をまとめてみよう.

定理 0.6 $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $(\ell^p_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_p)$ は Banach 空間である.

(2) 特に $p=2$ の時, つまり $(\ell^2_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|_2)$ は実 Hilbert 空間である.

問題 39. (各 5pt.) $1 \leq p < q < \infty$ とする.

(1) $\ell^p_{\mathbb{R}} \subset \ell^q_{\mathbb{R}}$ を示せ. また等式が成り立たないことを示せ.

(2) $\ell^p_{\mathbb{R}}$ は $\ell^q_{\mathbb{R}}$ の部分距離空間として, 完備か？

最後に有限次元と無限次元の際立った違いを見てみよう. $\mathbb{R}^N$ の有界列は収束部分列をもつことを知っている（問題 18）. しかし無限次元のときは以下に見るように, この性質はなりたたない.

問題 40. (10pt.) $1 \leq p \leq \infty$ とする. $\ell^p_{\mathbb{R}}$ の有界列であって, 収束部分列をもたないものを構成せよ.

[§] これを Minkowski の不等式という.