

数学 IIA 演習 No. 4

5月1日配布
担当：戸松 玲治*

もう少し Banach 空間の例を学ぼう.

問題 41. (5pt.) 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ と書く. これは自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. 写像 $\|\cdot\|_{\infty}: C_{\mathbb{R}}[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ を次で定める:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

- (1) 写像 $\|\cdot\|_{\infty}$ は発散せず, ノルムを与えることを示せ.
- (2) ノルム空間 $(C_{\mathbb{R}}[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ は完備であること, すなわち Banach 空間であることを示せ.

これまで実ベクトル空間の内積やノルムを考えてきたが, これらの複素数バージョンもある. 複素数の集合を $\mathbb{C}$ と書く. $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間としては 2 次元で $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ のように基底 $\{1, i\}$ をもつ. ここで i は $i^2 = -1$ をみたす数である. 全ての複素数は $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ の形に一意的に書ける. $z = a + ib$ に対し, その複素共役を $\bar{z} := a - ib$ と定める. 点 z と 0 の距離 $|z|$ は $\mathbb{R}^2$ の距離を使って, $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ と定め, z の絶対値という. すると問題 12 を $\mathbb{R}^2$ に応用することで, 写像 $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ が問題 1 の 3 つの性質をもつことが分かる.

X を複素ベクトル空間とする. (複素数値) 内積は写像 $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ であって, $a \in \mathbb{C}$ と $x, y, z \in X$ に対して次の性質をもつものである:

- (1) (正値性&非退化性) $(x, x) \geq 0$ であり, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (2) $\overline{(x, y)} = (y, x)$.
- (3) $(ax, y) = a(x, y)$. (4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

(2) と (3) から, 後ろの変数には共役線形性が出ることに注意しよう: $(x, ay) := \bar{a}(x, y)$, $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$. 内積をもつ複素ベクトル空間を (複素) 計量ベクトル空間という.

次にノルムは, 問題 12 において $a \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$ としたとき 3 つの性質をもつ写像 $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ のことである. ノルムをもつ複素ベクトル空間を (複素) ノルム空間という. 内積があれば $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ がノルムになることは問題 12 と同じように分かる.

中線定理 (問題 13) は複素数係数でもそのまま成り立つが, 偏曲等式は次のように変わる.

問題 42. (5pt.) X を内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ複素計量ベクトル空間とする. ノルムを $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ で定め, $x, y \in X$ とすると次が成り立つことを示せ. (偏曲等式)

$$(x, y) := \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \|x + i^k y\|^2.$$

ノルムがあれば距離が $d(x, y) := \|x - y\|$ として入るので,

複素計量ベクトル空間 $\Rightarrow$ 複素ノルム空間 $\Rightarrow$ 距離空間.

完備な複素計量ベクトル空間を Hilbert 空間, 完備な複素ノルム空間を Banach 空間という. もちろん $\mathbb{C}$ は 1 次元ベクトル空間であり, それは $\mathbb{R}^2$ と同じ距離が入っていたから完備である. つまり $\mathbb{C}$ は Hilbert 空間である.

問題 43. (5pt.) $\mathbb{C}^N := \{(z_1, \dots, z_N) \mid z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}\}$ とおく. 加法とスカラー倍は $\mathbb{R}^N$ と同様に入れる. 写像 $(\cdot, \cdot): \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ を, $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$ に対して次で定める.

$$(x, y) := \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i.$$

*website: <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2a/m2a.html>

(1) 写像 $(\cdot, \cdot)$ が内積を与えることを示せ.

(2) $\mathbb{C}^N$ が Hilbert 空間であることを示せ[†].

次に $M_N(\mathbb{C})$ によって複素数を要素に持つ $N \times N$ 行列全体のなす集合を表す. ここにはベクトル空間の構造や積の構造が自然に入っていることは知っている. さて $A \in M_N(\mathbb{C})$ に対して, $\|A\| \geq 0$ を次で定めよう[‡]. もちろんベクトル $v \in \mathbb{C}^N$ のノルムは $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ で与えられる.

$$\|A\| := \sup_{0 \neq v \in \mathbb{C}^N} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

問題 44. ((1,2),(3,4):各 5pt.) 次を示せ.

(1) 写像 $\|\cdot\|: M_N(\mathbb{C}) \rightarrow [0, \infty)$ は発散せず ($\|A\| < \infty$ ということ), ノルムになることを示せ. このノルムを行列の作用素ノルムという.

(2) (i, j) 成分に 1 をもち, あとの成分は全て 0 である行列を $E_{i,j}$ と書く. このとき $\|E_{i,j}\| = 1$ であることを示せ.

(3) $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^N \in M_N(\mathbb{C})$ とする. このとき次の不等式を示せ.

$$\sup_{i,j=1,\dots,N} |A_{i,j}| \leq \|A\| \leq \sum_{i,j=1}^N |A_{i,j}|.$$

(4) ノルム空間 $(M_N(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ が完備であること, すなわち Banach 空間であることを示せ.

問題 45. (5pt.) A^* を A の随伴行列とする, つまり $(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$. このとき $A, B \in M_N(\mathbb{C})$, $x, y \in \mathbb{C}^N$ に対して, 次を示せ.

(1) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. (2) $(Ax, y) = (x, A^*y)$. (3) $\|A^*\| = \|A\|$. (4) $\|A^*A\| = \|A\|^2 = \|AA^*\|$.

整数の集合 $\mathbb{Z}$ には通常の距離 $d(x, y) = |x - y|$ が入る. ここでは素数 $p \in \mathbb{N}$ に付随する別の距離を与えよう. $x \in \mathbb{Z}$ をとる. x が 0 でなければ因数分解をすることによって一意的に $x = yp^n$ と書ける. ここで $y \in \mathbb{Z}$ と p は互いに素な数, $n \geq 0$ である. そこで写像 $|\cdot|_p: \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ を $|x|_p = p^{-n}$, $|0|_p := 0$ と定める. これを $\mathbb{Z}$ の p 進付値という.

問題 46. (5pt.) p 進付値 $|\cdot|_p$ は次の性質をみたすことを示せ. $x, y \in \mathbb{Z}$ とすると,

(1) $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. (2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$. (3) $|-x|_p = |x|_p$. (4) $0 \leq |x|_p \leq 1$.

問題 47. (5pt.) $d_p(x, y) := |x - y|_p$ とおく. 写像 $d_p: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ は次の性質をみたすことを示せ. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ とすると,

(1) $d_p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. (2) $d_p(x, y) = d_p(y, x)$. (3) $d_p(x, y) \leq \max(d_p(x, z), d_p(z, y))$

上の (3) の性質は三角不等式 $d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y)$ を導く. それゆえ d_p は距離関数である. 一般に (3) の性質をみたす距離関数を非 Archimedes 距離関数という. 次の問題にあるように, 距離空間 $(\mathbb{Z}, d_p)$ は完備でない[§].

問題 48. (5pt.) $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n := \sum_{m=0}^n p^{2m}$ とおく. 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列であるが, 収束列ではないことを示せ.

[†] N 次元 Hilbert 空間は $\mathbb{C}^N$ と「Hilbert 空間として同型」であることが知られている.

[‡] ベクトルのノルムと行列のノルムを同じ記号 $\|\cdot\|$ で表す

[§] $\mathbb{Z}$ の d_p による完備化を $\mathbb{Z}_p$ と書き, この集合の元を p 進整数という.

さて距離空間の一般論に戻ろう。これ以降 (X, d) を距離空間とする。点 $x \in X$ と $r > 0$ に対して $B_X(x, r) := \{z \in X \mid d(z, x) < r\}$ とおき、これを中心 x 半径 r の開球という。 X を明示する必要がないときは、単に $B(x, r)$ と書く。

問題 49. (5pt.) 次を示せ。

- (1) $0 < r < s$ なら、 $B(x, r) \subset B(x, s)$. (2) $\bigcap_{r>0} B(x, r) = \{x\}$. (3) $\bigcup_{r>0} B(x, r) = X$.

開球の概念を発展させて、開集合を定義しよう。

定義 0.1 (X, d) を距離空間とする。部分集合 $U \subset X$ が開集合であるとは、 U が空集合であるか、あるいは任意の点 $x \in U$ に対して、ある $r > 0$ が存在し、 $B(x, r) \subset U$ がなりたつことをいう。

ここで $r > 0$ の選び方は点 $x \in U$ の取り方に依存していることに注意しよう。

問題 50. (5pt.) 開球 $B(x, r)$ は開集合であることを示せ。

問題 51. (5pt.) 空でない部分集合 $U \subset X$ に対して、次の条件が同値であることを示せ。

- (1) U は開集合である。
 (2) ある開球の族 $\{B(x_\lambda, r_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して、 $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B(x_\lambda, r_\lambda)$.

問題 52. (5pt.) 次の集合が $\mathbb{R}$ の開集合であるかどうかを確かめよ。 $a < b$ とする。

- (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. (2) 半開区間 $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. (3) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$.
 (4) $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. (5) 一点からなる集合 $\{x_0\}$, ここで $x_0 \in \mathbb{R}$.

次に閉集合を定義しよう。

定義 0.2 (X, d) を距離空間とする。部分集合 $F \subset X$ が閉集合であるとは、補集合 F^c が開集合であることをいう。

問題 53. (5pt.) 空でない部分集合 $F \subset X$ に対して、次の条件が同値であることを示せ。

- (1) F は閉集合である。
 (2) もし F 中の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $x \in X$ に収束するならば、 $x \in F$ である。

問題 54. (5pt.) 距離空間の一点からなる部分集合は閉集合であることを示せ。

問題 55. (5pt.) 次の集合が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるかどうかを確かめよ。 $a < b, c < d$ とする。

- (1) $[0, 1] \times [0, 1]$. (2) $[a, b) \times [c, d)$. (3) $\mathbb{Q} \times [0, 1]$. (4) $\mathbb{R} \times [0, 1]$. (5) $\{0\} \times \mathbb{R}$.

これらの例から分かるように、開集合でも閉集合でもない集合が存在することに注意しておく。

問題 56. (5pt.) X の異なる 2 点 x_1, x_2 に対して、ある開集合 $U_1, U_2 \subset X$ を、 $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ をみたすように取れることを示せ[¶]。

問題 57. (5pt.) $\mathcal{O}$ を X の開集合を全部集めた集合とする。このとき次が成り立つことを示せ^{||}。

- (1) $\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$.
 (2) $n \in \mathbb{N}$ とする。もし $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$ ならば $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{O}$.

[¶]距離空間は Hausdorff 空間であるということ。

^{||}後でやるが、距離空間とは限らない集合 X で (1), (2), (3) をみたす集合族 $\mathcal{O}$ を考えたとき組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という。

(3) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合 Λ で添え字づけられた開集合族とすると, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$.

問題 58. (5pt.) $\mathcal{F}$ を X の閉集合を全部集めた集合とする. このとき次が成り立つことを示せ.

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$.

(2) $n \in \mathbb{N}$ とする. もし $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ ならば $\bigcup_{k=1}^n F_k \in \mathcal{F}$.

(3) $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合 Λ で添え字づけられた閉集合族とすると, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

問題 59. (5pt.) (X, d) は完備距離空間, $S \subset X$ とする. このとき S が部分距離空間として完備であることと, S が X の閉集合であることは同値であることを示せ.

問題 60. (5pt.) 2 点集合 $\{0, 1\}$ の無限直積集合 $X := \prod_{m=1}^{\infty} \{0, 1\}$ に関数 $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ を

$$d(x, y) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |x_m - y_m|$$

で定義する (ここで $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}, y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}}$). X の点列は $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ のように, 文字の右肩に添え字を書くことにする. 次を示せ.

(1) d は発散せず, 距離関数である.

(2) $\mathbf{0} = (0)_{m \in \mathbb{N}}$ とおく. $X = \{x \in X \mid d(x, \mathbf{0}) \leq 1\}$ である.

問題 61. (10pt.) 引き続き前問の X を考える. 次を示せ.

(1) 点列 $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in X$ に収束する
 $\Leftrightarrow$ 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, 数列 $\{(x^n)_m\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $x_m \in \mathbb{R}$ に収束する.

(2) 点列 $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列である
 $\Leftrightarrow$ 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $(x^n)_m$ は定数である,
すなわち $(x^N)_m = (x^{N+1})_m = \dots$.

(3) (X, d) は完備距離空間である.

問題 62. (10pt.) 引き続き前問の X を考える.

(1) $k \in \mathbb{N}$ とする. $x_1, \dots, x_k \in \{0, 1\}$ に対して, 集合 $K_{x_1, \dots, x_k} := \{y \in X \mid y_m = x_m, m \leq k\}$ を定めると, $K_{x_1, \dots, x_k}$ は開かつ閉集合である.

(2) $x \in X, k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} B(x, 1/2^k) &= K_{x_1, \dots, x_k} \setminus \{(x_1, \dots, x_k, 1 - x_{k+1}, 1 - x_{k+2}, \dots)\} \\ &\supset K_{x_1, \dots, x_{k+1}} \ni x \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\mathcal{K} := \{K_{x_1, \dots, x_k} \mid x_1, \dots, x_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}\}$ と集合族を定める. 任意の X の開集合は, いくつかの $\mathcal{K}$ の元の和集合であることを示せ**.

** $\mathcal{K}$ が距離位相空間 X の開基であるということ.