数学 IIA 演習 No. 5

5 月 8 日配布
担当：戸松 玲治*

これまでは一つの空間の性質（計量空間, ノルム空間, 距離空間 etc.）について学んできた．今回は二つの距離空間とその間の写像の連続性について学ぼう．定義に入る前に集合論の一般論をいくつか復習しておく．

X, Y を集合とする．X の各元 x に対して Y の元 y を **1 つ**対応させる規則が定められているとき, この対応を X から Y への**写像**という．f が X から Y への写像であることを $f\colon X \to Y$ で表し, X を f の**定義域**, Y を f の**終域**という．f の終域 Y が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ などの時は, f を**関数**という．A を X の部分集合であるとしよう．このとき A を f で送った先 $f(A) := \{f(x) \mid x \in X\}$ を f による A の**像**という．特に $f(X)$ を f の像とか**値域**という．今度は B を Y の部分集合とする．このとき B を f で引き戻したもの $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を f による B の**原像**とか**逆像**という†

写像 f の値域が Y と一致するとき, すなわち $f(X) = Y$ のとき, f は**全射**であるとか**上への写像**であるという．また写像 f が任意の異なる 2 元 $x, x' \in X$ を異なる 2 元 $f(x), f(x') \in Y$ に写像するとき, f は**単射**であるとか **1 対 1 の写像**であるという．単射かつ全射な写像を**全単射**あるいは **1 対 1 の上への写像**という．f が全単射な写像であるならば, 元 $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在するから, $y \in Y$ に対してこの $x \in X$ を対応させられる．この写像を f の**逆写像**といい $f^{-1}\colon Y \to X$ と書く．

問題 63 (5pt.) $f\colon X \to Y$ を写像とする．次の性質が成り立つことを示せ: X の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, Y の部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して,

(1) $f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$

(2) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).$

(3) $B \subset Y$ とすると, $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

問題 64 (5pt.) 上の問題の続きを考える． $A \subset X$ とする． (1) を強くした等式 $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ や (3) の f 版 $f(A^c) = f(A)^c$ は, f が全単射であれば成り立つが一般には成り立たない．写像 $f\colon X \to Y$ でそれらが成り立たない例をあげよ．

元の総数が有限個である集合を**有限集合**, 有限個でない集合を**無限集合**という．無限集合のうち $\mathbb{N}$ から全単射が存在するものを**可算**であるとか**可付番**であるという．無限集合のうち可算でないものを**非可算**であるという．下の問題より $\mathbb{Q}$ は可算集合, $\mathbb{R}$ は非可算集合である．

問題 65 (5pt.) 全単射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を構成せよ．

問題 66 (10pt.) $\mathbb{R}$ が非可算集合であることを示せ‡．

問題 67 (10pt.) 全単射 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ を構成せよ, ここで $S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

問題 68 (10pt.) 集合 X の部分集合全体のなす集合を 2^X とかく．全単射 $f\colon 2^X \to \prod_{x\in X}\{0,1\}$ を構成せよ．

問題 69 (10pt.) 全単射 $f\colon 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ を構成せよ．

---

*website: http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2a/m2a.html
†この f^{-1} はただの記号で「逆写像」の意味ではないことに注意.
‡Cantor の対角線論法を参照せよ.

問題 70 (10pt.) 全単射 $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を構成せよ, ここで $N \geq 1$ 以上の自然数.

問題 71 (10pt.) X, Y を集合とする. もし単射な写像 $f\colon X \to Y$ と単射な写像 $g\colon Y \to X$ が存在すれば, 全単射な写像 $h\colon X \to Y$ が存在すること[§] を示せ.

さて距離空間の一般論に戻って, 写像の連続性を定義しよう. 以後特に断らない限り, $\mathbb{R}^N$ や $\mathbb{C}^N$ はユークリッドノルム[¶]を入れた距離空間とみる.

定義 5.1 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ が**連続**であるとは, 「もし X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が x に収束していれば, Y の点列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ に収束する」ことをいう.

問題 72 (5pt.) (X, d_X) を距離空間とする. $(X \times X, d)$ を問題 30 で定めた直積距離空間とする.

(1) $X \times X$ の点列 $\{(x_1^n, x_2^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 (a_1, a_2) に (距離 d に関して) 収束することと, 点列 $\{x_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{x_2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれ a_1 と a_2 に (距離 d_X に関して) 収束することは同値であることを示せ.

(2) 関数 $d_X\colon X \times X \to \mathbb{R}$ は連続関数であることを示せ.

問題 73 (10pt.) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ に対する次の条件が同値であることを示せ.

(1) f は連続である.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$, $x \in X$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$ がなりたつ.

(3) 任意の Y の開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ は X の開集合である.

(4) 任意の Y の閉集合 F の逆像 $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

問題 74 (5pt.) 実数値関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が微分可能ならば連続であることを示せ. また逆は成り立たないことを示せ.

定義 5.2 (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ とする. このとき次の数を定める.

(1) $d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

(2) $\delta(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$

$d(A, B)$ を部分集合 A と B の**距離**という. $\delta(A)$ を A の**直径**という. 一点集合 $\{x\}$ と A の距離は $d(\{x\}, A)$ の代わりに $d(x, A)$ と書く. $\delta(A) < \infty$ のとき A は**有界**, $\delta(A) = \infty$ であるとき A は**非有界**であるという.

問題 75 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とする. 次は同値であることを示せ.

(1) A は有界である.

(2) 任意の点 $z \in X$ に対して, $\sup\{d(z, x) \mid x \in A\} < \infty$.

(3) ある点 $z \in X$ が存在して, $\sup\{d(z, x) \mid x \in A\} < \infty$.

問題 76 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ とすると $d(A, B) < \infty$ であることを示せ.

問題 77 (5pt.) (X, d) を距離空間, 次の集合 $A, B \subset X$ の距離 $d(A, B)$ を求めよ.

[§] **Cantor-Bernstein-Schröder の定理**という.

[¶] $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2}$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$ のこと.

(1) $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$, $B = [2,3]$.

(2) $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1)$, $B = (0,1]$.

(3) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, $B_t = \{(x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$, ここで $t \in \mathbb{R}$.

(4) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(\pi/2, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, \tan(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi/2\}$.

問題 78 (5pt.) 次の集合 A の直径を求めよ.

(1) $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$.

(2) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$.

(3) $X = \mathbb{R}^2$, $A = S^1$ (S^1 は問題 67 に出てきた単位円周).

(4) $X = \mathbb{R}^N$, $A = S^{N-1} := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1^2 + \cdots + x_N^2 = 1\}$.

問題 79 (5pt.) (X, d) を距離空間, 2^X を X の部分集合全体のなす集合とする. 写像 $d\colon 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ を定義 5.2 で出てきたものとする. このとき $(2^X, d)$ は距離空間であるか?

問題 80 (10pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とする. 関数 $f_A\colon X \to \mathbb{R}$ を $f_A(x) = d(x, A)$ と定める.

(1) 2 点 $x, y \in X$ に対して, $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$ がなりたつことを示せ$^{\|}$.

(2) f_A は連続であることを示せ.

問題 81 (5pt.) F を $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合とする. $x \in \mathbb{R}^N$ とする. このときある $y \in F$ が存在して $d(x, F) = d(x, y)$ をみたすことを示せ.

問題 82 (10pt.) F を $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合, (X, d) を距離空間とする. $f\colon \mathbb{R}^N \to X$ が連続写像ならば, F の像 $f(F)$ は有界閉集合であることを示せ.

ノルム空間の線形写像について連続性を考える. 以後 $\mathbb{K}$ によって, 係数体 $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を表す.

問題 83 (5pt.) X, Y を $\mathbb{K}$ 上ノルム空間, $T\colon X \to Y$ を線形作用素**とする. 次の同値性を示せ.

(1) T は連続である.

(2) T は**有界作用素**である, つまり $\displaystyle\sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$.

有界作用素 $T\colon X \to Y$ に対して, $\|T\| := \sup\{\|Tx\|/\|x\| \mid 0 \neq x \in X\}$ と定め, これを T の**作用素ノルム**という. 定義により $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ がなりたつ. ノルム空間 X からノルム空間 Y への有界作用素全体を $B(X, Y)$ とかく. $S, T \in B(X, Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して, 加法を $(S + T)x := Sx + Tx$, スカラー倍を $(\alpha T)x := \alpha Tx$ と定める, ここで $x \in X$ である. この演算で $B(X, Y)$ は $\mathbb{K}$ 上ベクトル空間となる.

問題 84 (10pt.) X, Y を $\mathbb{K}$ 上ノルム空間とする. このとき次を示せ.

(1) $B(X, Y)$ は作用素ノルムについて, $\mathbb{K}$ 上ノルム空間になる.

(2) さらにもし Y が Banach 空間ならば, $B(X, Y)$ も Banach 空間である.

問題 85 (5pt.) X, Y, Z をノルム空間, $S \in B(X, Y)$, $T \in B(Y, Z)$ とする. このとき不等式 $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ がなりたつことを示せ.

$^{\|}$ f_A は **Lipschitz 定数** 1 の **Lipschitz 連続関数**であるということ.

**線形写像のことを線形作用素といい, $T(x)$ を Tx とかく. 有限次元空間上の線形作用素は行列で表現できる.

問題 86 (10pt.) 問題 41 の続きを考える．$C_{\mathbb{R}}[0,1]$ にノルム $\|\cdot\|_\infty$ を与えている．$\rho \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ に対して積分を与える写像 $I_\rho\colon C_{\mathbb{R}}[0,1] \to \mathbb{R}$ を $I_\rho(f) := \int_0^1 f(x)\rho(x)dx$ によって定める．このとき I_ρ は有界線形作用素であり，$\|I_\rho\| = \int_0^1 |\rho(x)|dx$ であることを示せ．

これまで一つの空間に一つの距離関数を入れて考えてきたが，複数の距離関数を定めることもある．そこで距離関数の同値性を導入する．

定義 5.3 X を集合，d_1, d_2 を X 上の距離関数とする．これらが**同値**であるとは，ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して

$$c_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le c_2 d_1(x,y)$$

がなりたつことである．

距離関数の同値性は距離空間の様々な性質を保存する．

問題 87 (5pt.) X を集合，d_1, d_2 を X 上の同値な距離関数とする．$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ をそれぞれ d_1, d_2 から決まる開集合族とする．すると $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ であること[††] を示せ．

一方同値でなくても，開集合族が一致する例はある．

問題 88 (10pt.) (X, d) を距離空間とする．今写像 $\widetilde{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を $\widetilde{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$, $x, y \in X$ によって定める．$\widetilde{d}$ が距離関数であることを示せ．また $\mathcal{O}, \widetilde{\mathcal{O}}$ をそれぞれ $d, \widetilde{d}$ から決まる開集合族とすると，$\mathcal{O} = \widetilde{\mathcal{O}}$ であることを示せ．また X が距離 d に関して非有界ならば，これらの距離は同値でないことを示せ．

問題 89 (5pt.) X を集合，d_1, d_2 を X 上の同値な距離関数とする．このとき距離空間 (X, d_1) が完備であることと，距離空間 (X, d_2) が完備であることは同値であることを示せ．

問題 90 (5pt.) X を集合，$A \subset X$, d_1, d_2 を X 上の同値な距離関数とする．このとき A が d_1 に関して有界であることと，A が d_2 に関して有界であることは同値であることを示せ．

ベクトル空間 X にノルムがあれば，ノルム $\|\cdot\|$ から距離 $d(x,y) = \|x - y\|$ を構成できるのであった．もし X に二つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ があり，それらから定まる距離が同値であるならば，ノルム $\|\cdot\|_1$ とノルム $\|\cdot\|_2$ は**同値**であるという．

問題 91 (5pt.) X をベクトル空間，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ を X のノルムとする．このとき次が同値であることを示せ．

(1) $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値である．

(2) ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して任意の $x \in X$ に対して $c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$ がなりたつ．

問題 92 (5pt.) ベクトル空間 $\mathbb{K}^N$ で次の関数を考える．$1 < p < \infty$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$ に対して，

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le N} |x_i|$$

とおくと，これらがノルムを定めることは問題 36, 38 と同じ方法で示せる．このときこれらが互いに同値なノルムを定めることを示せ[‡‡]．

[††] 同値な距離関数の取り替えで位相構造は不変であるということ．

[‡‡] $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_r$, $\|\cdot\|_\infty$ の三つのこと．ここで $p, r > 1$. 後でやるが有限次元ベクトル空間の任意の二つのノルムは同値であることが知られている．