

数学 IIA 演習 No. 6

6月5日配布
担当：戸松 玲治*

ノルムの同値性についてもう一つ例を考えよう.

問題 93 (各 5pt.) 問題 41 において, 連続関数の空間 $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ に $\sup$ ノルム $\|\cdot\|_{\infty}$ を定めた. ここで L^1 ノルム $\|\cdot\|_1$ を $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx$ で定める. 次を示せ.

- (1) 関数 $\|\cdot\|_1: C_{\mathbb{R}}[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ はノルムである.
- (2) 任意の $f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ に対して, 不等式 $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}$ が成り立つ.

問題 94 (各 5pt.) $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ において, 関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次で定める.

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{if } 0 \leq x \leq 1/n \\ -nx + 2 & \text{if } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{if } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (1) 関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に $\sup$ ノルムで収束しないことを示せ.
- (2) 関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 0 に L^1 ノルムで収束することを示せ.
- (3) $\sup$ ノルムと L^1 ノルムは同値でないことを示せ.

問題 95 (各 5pt.) $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ において, 関数列 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次で定める.

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x \leq -(1/n) + 1/2 \\ nx + 1 - (n/2) & \text{if } -(1/n) + 1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{if } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (1) $m \leq n$ のとき, $\|g_m - g_n\|_1 = (1/2m) - (1/2n)$ であることを示せ.
- (2) 関数列 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は L^1 ノルムでコーシー列であることを示せ.
- (3) $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は L^1 ノルムに関して収束列ではないことを示せ[†].

さて距離空間の開集合, 連続写像についてさらに学んでいこう.

問題 96 (5pt.) 問題 57 で, 開集合たちの有限個の共通部分は開集合であることを示した. しかし開集合たちの無限個の共通部分は開集合とは限らない. そのような例を $\mathbb{R}$ で構成せよ.

問題 97 (5pt.) 問題 58 で, 閉集合たちの有限個の合併部分は閉集合であることを示した. しかし閉集合の無限個の合併集合は閉集合とは限らない. そのような例を $\mathbb{R}$ で構成せよ.

問題 98 (5pt.) 開集合でも閉集合でもない $\mathbb{R}^2$ の部分集合を構成せよ.

問題 99 (5pt.) X を集合とする. 関数 $d: X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ を, $x \in X$ に対して $d(x, x) = 0$, 異なる $x, y \in X$ に対して $d(x, y) = 1$ とおく. d は距離関数であることを示せ.

*website: <http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2a/m2a.html>

[†]従って $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ は $\sup$ ノルムでは完備だが, L^1 ノルムでは完備でない.

以前 $x \in X$, $r > 0$ に対して開球 $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$ を定めたことを思い出そう.

問題 100 ((1,2),(3,4):各 5pt.) 問題 99 の距離空間 (X, d) を考える.

- (1) もし $r \geq 1$ ならば, $B(x, r) = X$ であることを示せ.
- (2) もし $r < 1$ ならば, $B(x, r) = \{x\}$ であることを示せ. 特に一点は開集合である.
- (3) この距離空間においては, 任意の部分集合は開集合であることを示せ[‡].
- (4) この距離空間においては, 任意の部分集合は閉集合であることを示せ.

さて部分集合の閉包 (closure) の概念を導入しよう.

定義 6.1 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき A の閉包 $\bar{A}$ を次で定義する.

$$\bar{A} := \{x \in X \mid \text{任意の } r > 0 \text{ に対して } B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

問題 101 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき次を示せ.

$$\bar{A} = \{x \in X \mid x \text{ を含む任意の開集合 } U \text{ に対して } U \cap A \neq \emptyset\}$$

問題 102 (5pt.) (X, d) を距離空間, 部分集合 $A \subset X$ に対して次を示せ. (1) $A \subset \bar{A}$. (2) $\bar{A}$ は閉集合である.

問題 103 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 閉包 $\bar{A}$ は, A を含む閉集合のうちで最小のものであること, つまりもし閉集合 $F \subset X$ が $A \subset F$ をみたせば, $\bar{A} \subset F$ であることを示せ.

問題 104 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 次の同値性を示せ.

$$A = \bar{A} \iff A \text{ は閉集合である.}$$

問題 105 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. 次が成り立つことを示せ ((1) は問題 102 に含まれているので (2) 以降をやること).

$$(1) A \subset \bar{A}. \quad (2) \bar{\bar{A}} = \bar{A}. \quad (3) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (4) \bar{\emptyset} = \emptyset. \quad (5) A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}.$$

問題 106 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. すると $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ であった (前問 (3)). これに対して $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ は成り立つが, 等式 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ は一般には成り立たない. この等式が成り立たない例を $\mathbb{R}^2$ で構成せよ.

問題 107 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, 次の集合 A の閉包 $\bar{A}$ を求めよ. (1) $A = \{x_0\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). (2) $A = (0, 1)$. (3) $A = \mathbb{Q}$. (4) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

問題 108 (5pt.) $\mathbb{R}^2$ において, 次の集合 A の閉包 $\bar{A}$ を求めよ. (1) $A = \{(x_0, y_0)\}$ ($(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$). (2) $A = (0, 1) \times [0, 1)$. (3) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

問題 109 (5pt.) $\mathbb{R}^N$ において, 次の集合 A の閉包 $\bar{A}$ を求めよ. (1) $A = \{(x_1, \dots, x_N)\}$ ($(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$). (2) $A = \prod_{i=1}^N [0, 1)$. (3) $A = \mathbb{Q}^N$.

前 2 問を次のように一般化して整理しておこう.

問題 110 (5pt.) 距離空間 (X_1, d_1) , (X_2, d_2) に対して, 直積距離空間 $(X_1 \times X_2, d)$ を問題 30 のように定める. 部分集合 $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ に対して, $\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ が成り立つことを示せ.

[‡]この位相を離散位相という.

次に内部 (interior) または内核を定義しよう.

定義 6.2 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき A の内部 A° を次で定義する.

$$A^\circ := \{x \in X \mid \text{ある } r > 0 \text{ が存在して } B(x, r) \subset A\}.$$

閉包については $A \neq \emptyset$ なら $\overline{A} \neq \emptyset$ だが, 内部については $A^\circ = \emptyset$ になりうることをみよう.

問題 111 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A = \mathbb{Q}$ とする. $A^\circ = \emptyset$ を示せ.

問題 112 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき次を示せ.

$$A^\circ := \{x \in X \mid x \text{ を含むある開集合 } U \text{ が存在して } U \subset A\}.$$

問題 113 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき次を示せ. (1) $A^\circ \subset A$. (2) A° は開集合である.

問題 114 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 内部 A° は, A に含まれる X の開集合のうちで最大のものであること, つまりもし開集合 $U \subset X$ が $U \subset A$ をみたせば, $U \subset A^\circ$ であることを示せ.

問題 115 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 次は同値性を示せ.

$$A \text{ は } X \text{ の開集合である} \iff A^\circ = A.$$

補集合をとることにより閉包と内部との間に次のような関係を得る.

問題 116 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき次を示せ.

$$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c, \quad A^\circ = (\overline{A^c})^c.$$

問題 117 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. 次が成り立つことを示せ. ((1) は問題 113 に含まれているので (2) 以降をやること)

$$(1) A^\circ \subset A. \quad (2) (A^\circ)^\circ = A^\circ. \quad (3) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ. \quad (4) X^\circ = X. \quad (5) A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ.$$

問題 118 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. すると $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ であった (前問 (3)). これに対して $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ は成り立つが, 等式 $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成り立たない. この等式が成り立たない例を $\mathbb{R}^2$ で構成せよ.

距離空間の部分集合に対して, その閉包, 内部を定義してきた. 次に外部 (exterior), 境界 (boundary) を定義しよう.

定義 6.3 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき A の外部 $\text{ext } A$ を次で定義する.

$$\text{ext } A = X \setminus \overline{A}.$$

定義 6.4 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき A の境界 ∂A を次で定義する.

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

閉包等を図示して視覚的に理解しよう. 以下 $\mathbb{D}$ は閉円盤 $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を表す.

問題 119 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 閉円盤 $\mathbb{D}$ を考える. $\mathbb{D}$ の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 120 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \{(1, 0)\}$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 121 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \{(0, 0)\}$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 122 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 123 (5pt.) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{R}^2$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

定義 6.5 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

- (1) 閉包 $\overline{A}$ の元を触点, 内部 A° の元を内点, 外部 $\text{ext } A$ の元を外点, 境界 ∂A の元を境界点という.
- (2) 点 $x \in X$ が A の集積点であるとは, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ をみたすことである.
- (3) もし A の点 x が集積点でないならば, 点 x を A の孤立点という.

問題 124 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 点 $x \in X$ に対して, 次は同値であることを示せ.

- (1) x は A の集積点である.
- (2) 任意の $r > 0$ に対して, $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
- (3) x を含む任意の開集合 $U \subset X$ に対して, $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
- (4) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in A$, $x_n \neq x$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となるように存在する.

問題 125 (5pt.) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 点 $x \in X$ に対して, 次は同値であることを示せ.

- (1) x は A の孤立点である.
- (2) $x \in A$ でありかつ, ある $r > 0$ が存在して, $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

問題 126 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 127 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 128 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \mathbb{Q}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 129 (5pt.) $\mathbb{R}^2$ において, $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 130 (5pt.) $\mathbb{R}^2$ において, $A := \{(x, \tan(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < \pi/2\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 131 (5pt.) $\mathbb{R}$ において, $A := \mathbb{Z}$ と定める. A の任意の点は孤立点であることを示せ.

問題 132 (5pt.) $\mathbb{R}^N$ において, $A := \mathbb{Z}^N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1, \dots, x_N \in \mathbb{Z}\}$ と定める. A の任意の点は孤立点であることを示せ.

問題 133 (5pt.) 距離空間 (X, d) において, 有限部分集合 A を考える. A のすべての点は孤立点であることを示せ.