数学 IIA 演習 No. 7

6 月 19 日配布
担当：戸松 玲治*

可算集合とは, 有限集合あるいは可算無限集合 ($\mathbb{N}$ からの全単射を構成できる集合) のことである.

定義 7.1 (X, d) を距離空間とする.

(1) 部分集合 $S \subset X$ の閉包が X と一致する, すなわち $\overline{S} = X$ の時, S は X で**稠密**(dense) であるという.

(2) X の中に稠密な可算部分集合が存在する時, X は**可分**(separable) であるという.

問題 134 (5pt.) $\mathbb{R}$ は可分であることを示せ.

問題 135 (5pt.) $\mathbb{R}^N$ は可分であることを示せ.

問題 136 (5pt.) $\mathbb{C}^N$ は可分であることを示せ.

これらを一般化しよう.

問題 137 (10pt.) (X_1, d_1), (X_2, d_2) を距離空間, $(X_1 \times X_2, d)$ をその直積距離空間とする†. このとき次が同値であることを示せ.

(1) X は可分である.

(2) X_1 と X_2 はともに可分である.

問題 138 (5pt.) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f, g \colon X \to Y$ を連続関数とする. $S \subset X$ を稠密な部分集合とする. このとき $f|_S = g|_S$ ならば, $f = g$ であることを示せ.

問題 139 (5pt.) (X, d) を距離空間, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 部分集合 $X_n \subset X$ が次の条件を満たしていれば, X は可分であることを示せ.

(1) $X_n \subset X$ は部分距離空間として可分.

(2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ は X で稠密.

問題 140 (10pt.) (X, d) を距離空間, $S \subset X$ を部分集合とする. もし X が可分ならば, 部分距離空間 S も可分であることを示せ.

問題 141 (10pt.) $1 < p < \infty$ に対して, Banach 空間 $\ell^p(\mathbb{N})$ は可分であることを示せ (Hint: 問題 136, 139 参照).

問題 142 (各 5pt.) Banach 空間 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ を考える.

(1) 部分集合 $S \subset \mathbb{N}$ に対して, $1_S \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ を次で定める:

$$1_S(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in S, \\ 0 & \text{if } n \notin S. \end{cases}$$

もしも $S, T \subset \mathbb{N}$ が $S \neq T$ ならば, $\|1_S - 1_T\|_\infty = 1$ であることを示せ.

---

*website: http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/m2a/m2a.html

†$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$.

(2) Banach 空間 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ は非可分であることを示せ.

これまで距離空間の完備性や距離位相などを学んできたが, もう一つの重要な概念である (点列) コンパクト性を導入する. まずボルツァーノ・ワイヤストラスの定理（問題 3, 18）を思い出そう. $\mathbb{R}^N$ の有界な数列は収束部分列をもつのであった. この性質を次の点列コンパクト性に一般化しよう.

定義 7.2 (X,d) を距離空間とする.

(1) X が**点列コンパクト** (sequencially compact) であるとは, X の任意の点列が収束部分列をもつことをいう.

(2) 部分集合 $K \subset X$ が**点列コンパクト**であるとは, K が部分距離空間として点列コンパクトであることをいう.

上の (2) を言いかえた次の命題はよく使われる.

問題 143 (5pt.) (X,d) を距離空間, $K \subset X$ とする. K が点列コンパクトであることと, K の任意の点列が K **内に収束先をもつ**ような収束部分列をもつことが同値であることを示せ.

問題 144 (5pt.) 部分集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ をとる. このとき次の定理を示せ ($\Rightarrow$ は問題 147 なので $\Leftarrow$ のみ示せばよい. Hint: 問題 18 参照.):

定理 7.3 $K \subset \mathbb{R}^N$ は点列コンパクトである $\Leftrightarrow$ $K \subset \mathbb{R}^N$ は有界閉集合である.

この定理を利用して次の問題を解いてみよう.

問題 145 (5pt.) 次のうち $\mathbb{R}$ の点列コンパクト集合はどれか. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ とする.
(1) $\{a\}$ (2)$[a,b]$ (3)(a,∞) (4)$[a,b]\cap\mathbb{Q}$.

問題 146 (5pt.) 次のうち $\mathbb{R}^2$ の点列コンパクト集合はどれか. $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$ とする.
(1) $\mathbb{D} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$ (2)$[a,b]\times[c,d]$ (3)$[a,b]\times[c,d)$ (4)$\mathbb{R}^2$.

定理 7.3 は $\mathbb{C}^N$ でも正しい (距離空間として $\mathbb{C}^N$ と $\mathbb{R}^{2N}$ は同じものとみなせるから). $\mathbb{R}^N$ や $\mathbb{C}^N$ とは限らない距離空間への一般化を考える際, $\Rightarrow$ は正しいことが問題 147 で分かる.

問題 147 (各 5pt.) このとき次の定理を (1),(2) の手順で示せ:

定理 7.4 (X,d) を距離空間, $K \subset X$ を点列コンパクト集合とすれば, K は X の有界閉集合である.

(1) K が非有界集合ならば, K は点列コンパクトでない.

(2) K が点列コンパクトならば, K は X の閉集合である.

しかし逆は一般には成り立たないことを無限次元ノルム空間で例をあげてみる[‡].

問題 148 ((1,2),(3,4):各 5pt.) Banach 空間 ℓ^∞ の閉単位球 $B := \{x\in\ell^\infty \mid \|x\|_\infty \le 1\}$ を考える. これは有界閉集合であるが, 点列コンパクトでないことを次の手順で示せ.

(1) B が有界閉集合であることを示せ.

(2) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\delta_n \in \ell^p$ を次で定める:

$$\delta_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{if } m \neq n. \end{cases}$$

このとき $\delta_n \in B$ であることを示せ.

[‡]したがって「有界閉集合ならば点列コンパクトである」というのは一般には成り立たないので注意.

(3) $n \neq n'$ ならば $\|\delta_n - \delta_{n'}\|_\infty = 1$ であることを示せ.

(4) B の点列 $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のどんな部分列も収束列でないことを示せ.

自明な点列コンパクト集合として空集合があるが, 1 点からなる集合も点列コンパクトである.

問題 149 (5pt.) (X,d) を距離空間とし, 1 点 $x \in X$ をとる. このとき x からなる部分集合 $\{x\} \subset X$ は点列コンパクトであることを示せ.

点列コンパクト集合族の中で閉じている集合演算について調べよう.

問題 150 (各 5pt.) (X,d) を距離空間, $\mathcal{K}$ を X の点列コンパクト集合全体とする. 次を示せ.

(1) $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{m=1}^{n} K_m \in \mathcal{K}$.

(2) $K_\lambda \in \mathcal{K}$, $\lambda \in \Lambda$ [§] $\Rightarrow \displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \in \mathcal{K}$.

点列コンパクト集合の連続写像による像を考えよう.

問題 151 (5pt.) 次の定理を示せ.

> **定理 7.5** (X,d), (Y,d) を距離空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像, $K \subset X$ を点列コンパクト集合とする. このとき K の像 $f(K)$ は Y の点列コンパクト集合である.

円周 S^1 と実数体 $\mathbb{R}$ の位相構造が異なることをみよう.

問題 152 (各 5pt.) 単位円 $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $\mathbb{R}$ について考える. 問題 67 でやったように, 全単射 $S^1 \to \mathbb{R}$ は存在する. しかし連続な全射 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを次の手順で示せ.

(1) S^1 は $\mathbb{R}^2$ の点列コンパクト集合であることを示せ.

(2) 連続な全射 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ は存在しないことを示せ.

点列コンパクト集合の連続写像による原像は一般には点列コンパクトではない.

問題 153 (5pt.) (X,d), (Y,d) を距離空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像, $K \subset Y$ を点列コンパクト集合とする. このとき K の原像 $f^{-1}(K)$ が X の点列コンパクト集合とならないような例をあげよ.

実数値連続関数は閉区間の上で, 最大値と最小値をもつことが知られている. これを一般化しよう.

定理 7.6 (K,d) を点列コンパクト距離空間, $f\colon K \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき f は最大値, 最小値をもつこと, すなわちある点 $a, b \in K$ が存在して, すべての点 $x \in X$ に対して $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ が成り立つ.

問題 154 (各 5pt.) 定理 7.6 を次の手順で示す.

(1) $f(K)$ が $\mathbb{R}$ の有界閉集合であることを示せ.

(2) $f(K)$ の下限, 上限をそれぞれ m, M とおく. $f(K)$ が閉集合であることを使って, $f(a) = m$, $f(b) = M$ となる $a, b \in K$ が存在することを示せ.

[§] Λ は添字集合. Hint: 問題 58, 147 参照.

問題 155 (5pt.) (X, d) を距離空間, $K \subset X$ を点列コンパクト集合とすれば, K は部分距離空間として完備であることを示せ.

問題 156 (5pt.) (X, d) を距離空間, K を X の点列コンパクト集合, F を X の閉集合とする. もし $F \subset K$ ならば, F は点列コンパクトであることを示せ.

定義 7.7 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

(1) f が**等長写像**[¶]であるとは, すべての点 $x_1, x_2 \in X$ に対して次がなりたつことをいう:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

(2) f が**縮小写像**であるとは, ある $0 < r < 1$ が存在して, すべての点 $x_1, x_2 \in X$ に対して次がなりたつことをいう[‖]:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq r d_X(x_1, x_2)$$

問題 157 (各 5pt.) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) f が等長写像ならば、f は単射かつ連続である.

(2) f が縮小写像ならば、f は連続である.

問題 158 (各 5pt.) (X, d) を距離空間とし, $\mathrm{Isom}(X)$ を X 上の全単射等長写像のなす集合とする. 次がなりたつことを示せ[**].

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は $\mathrm{Isom}(X)$ の元である.

(2) $f, g \in \mathrm{Isom}(X) \Rightarrow f \circ g \in \mathrm{Isom}(X)$.

(3) $f \in \mathrm{Isom}(X) \Rightarrow f^{-1} \in \mathrm{Isom}(X)$.

縮小写像の不動点定理を示そう.

定理 7.8 (縮小写像の不動点定理) (X, d) を完備距離空間, $f\colon X \to X$ を縮小写像とする. このとき f は唯一つの不動点をもつ, すなわち $f(x) = x$ なる点 $x \in X$ が唯一つ存在する[††].

問題 159 (各 5pt.) 定理 7.8 を次の手順で示す.

(1) (一意性) もし $x, y \in X$ が縮小写像 f の不動点であれば, $x = y$ であることを示せ.

(2) (存在 1) 点 $a \in X$ を任意にとり, $a_{n+1} := f(a_n)$, $a_1 = a$ として点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を構成する. このとき次の不等式を示せ: すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$d(a_{n+1}, a_n) \leq r^{n-1} d(a_2, a_1).$$

(3) (存在 2) 点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることを示せ (Hint: 三角不等式).

(4) (存在 3) 点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束先は (なぜ収束するのか?), f の不動点であることを示せ.

[¶] 等長写像の定義に全単射であることを付け加えることもあるので注意が必要である.
[‖] f はリプシッツ定数 $r < 1$ の写像ということ.
[**] したがって写像の結合を演算として $\mathrm{Isom}(X)$ は群である.
[††] 写真を適当に縮小してから, 適当にもとの写真の上に重ねると唯一つ動いていない点がある, ということがいえる.