数学 IIA 演習 No.1

4 月 10 日配布
担当：戸松 玲治

1 演習の形式と成績評価の方法

この授業では位相空間論の演習を行います. 毎回問題用紙を配り, 出来た人から黒板で解いてもらいます. 原則早いもの勝ちですが, 何人かが競った時には発表回数の少ない人の中から選びます. 各問題は今学期中有効なので, 当日配られた問題の他に古い問題も解くこともできます.

成績は発表回数と発表内容（満点＝問題の pt 数）から評価します. 単位取得の為に**最低 3 回の発表**が必要です. 出席数は考慮しませんが, トレーニングのよい機会なので参加することを勧めます.

発表の仕方：聴衆に理解してもらえるように分かりやすく１０分くらいで発表してください. 聴衆は発表されているロジックが通っているかをチェックし, 不明な点があれば積極的に質問をすること.

問題は順次私の web page にアップします: http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/rto/sched.html

2 数学の記号

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ そして $\mathbb{C}$ は各々, 自然数（0 は含まない）, 有理数, 実数そして複素数の集合を表す.
- ベクトル空間のベクトルは, 小文字で書く（x, y, z 等）.

3 問題

問題 1. (5pt.) 絶対値を取る関数 $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は次を満たすことを示せ. $a, x, y \in \mathbb{R}$ に対して

1. $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. $|ax| = |a||x|$,
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

またこれらを用いて $||x| - |y|| \leq |x - y|$ を示せ.

数列の性質をいくつか復習する.

定義 3.1 数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対して（関数 $x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ のこと）, 次の性質を定義する.

- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が**収束列**であるとは, ある $x \in \mathbb{R}$（ただ *1* つに定まる）が存在して, $\lim_{n \to \infty} |x_n - x| = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $|x_n - x| < \varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が**コーシー列**であるとは, $\lim_{m, n \to \infty} |x_m - x_n| = 0$, すなわち「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, もし $m, n \in \mathbb{N}$ が N より大きければ $|x_m - x_n| < \varepsilon$ がなりたつ」ことを言う.
- $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が**有界列**であるとは, 部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ が有界なこと, すなわち「ある $M > 0$ が存在して, $|x_n| \leq M$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ でなりたつこと」を言う.

問題 2. (各 5pt.) 次を示せ.

(1) 実数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列 $\Rightarrow$ 実数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列. （実は逆も成り立つ. 問題 5 参照. ）

(2) 実数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がコーシー列 $\Rightarrow$ 実数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界列.

次に実数の連続性についての性質を復習する．

定理 3.2 (区間縮小法) 有界閉区間の列 $I_1, I_2, \dots$ が単調減少，すなわち $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ となっているとする．このとき次がなりたつ．

1. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.
2. $I_n = [a_n, b_n]$ とする．もしも $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば，共通部分はある一点 a からなる: $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. さらにこのとき $a = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ である．

ここで部分列についても復習しておく．

定義 3.3 自然数の値を取る数列 $\{p(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ が狭義単調増加（つまり $p(1) < p(2) < \cdots$ ということ）であるとき，数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ から作られる新しい数列 $\{x_{p(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を，数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**部分列**という．

つまり狭義単調増加関数 $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ と関数 $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ の合成関数 $x \circ p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が部分列を与える．関数 p の取り方によっていろいろな部分列を作ることができる．

問題 3. (10pt.) 区間縮小法を用いて次の定理を導け．

> **定理*** **(ボルツァァーノ・ワイヤストラス)**: 実数の有界列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列をもつ．

（ヒント: 有界性から，ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ がなりたつ．$I_0 := [a, b]$ として帰納的に閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ を定める．例えば $I_0 = [a, (a+b)/2] \cup [(a+b)/2, b]$ だから $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はどちらか（両方の可能性もある）に無限回含まれる．無限回含む方を選び I_1 と定める．）

問題 4. (5pt.) コーシー列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のある部分列 $\{x_{p(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が x に収束しているとする．このとき，元の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も同じ極限 x に収束する．

問題 5. (10pt.) 次を示せ．

> **定理**†: 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列である．$\Leftrightarrow$ 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ コーシー列である．

($\Rightarrow$ は問題 2(1) なので，ここでは $\Leftarrow$ を示すこと．問題 2(2), 問題 3, 問題 4 を利用せよ．)

問題 6. (各 5pt.) x_n が次の形の数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束することを証明し，極限を求めよ．

$$\text{(i)}\ \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}, \quad \text{(ii)}\ \frac{n^3}{a^n}\ (1 < a), \quad \text{(iii)}\ \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

問題 7. (10pt.) 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $x \in \mathbb{R}$ に収束しているならば，$y_n := (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ も x に収束することを示せ．

問題 8. (5pt.) 実数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = x$ があるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n/n = x$ を示せ．

問題 9. (5pt.) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ は有界単調増加列であることを示せ．またこの収束先を e と書くと，$2 < e < 3$ であることを示せ．

問題 10. (10pt.) 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ を満たしているとする．もしも $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n/x_{n+1} = x > 1$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを証明せよ．

---

*後で学ぶ事柄であるが，$\mathbb{R}$ の有界閉集合は**コンパクト**であるということを示している．

†これも後でやるが，$\mathbb{R}$ が**完備距離空間**であることを示している．