数学 IIB 演習 No. 1

10 月 1 日配布
担当：戸松 玲治

1 距離空間の復習

1.1 距離空間の ABC

問題 1 (1pt) 距離空間とは何か.

問題 2 (1pt) $\mathbb{R}^n$ に距離を沢山構成せよ.

問題 3 (1pt) 距離空間の例を沢山あげよ.

問題 4 (1pt) 点 $x \in X$ の ε 開球とは何か. イメージ図も描け.

問題 5 (1pt) 距離空間 (X, d) の点列 x_n が x に収束するとはどういうことか.

点列 x_n が (面倒くさいので単に x_n と書いているが, 本当は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ とか $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書いた方がベター), x に収束するとき, 矢印を使って $x_n \to x$ と書く. もちろんこの矢印は写像のことではない.

問題 6 (1pt) 距離空間 (X, d) の点列 x_n がコーシー列であるとはどういうことか.

問題 7 (1pt) 距離空間 (X, d) の収束列はコーシー列であることを示せ.

問題 8 (1pt) コーシー列だが収束列でないような例を構成せよ ($\mathbb{R}$ でできるか?).

問題 9 (1pt) 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) から, 直積集合 $X \times Y$ に距離関数を定めたい. どうすればよいか. できるだけ沢山あげよ.

1.2 開集合と閉集合

問題 10 (1pt) 距離空間の開集合とは何か. 閉集合とは何か.

問題 11 (1pt) 距離空間の開集合族は開集合系の公理を満たす. それは何か.

問題 12 (1pt) 「すべての集合は開集合か閉集合である.」この文章は一般にうそか本当か.

1.3 連続写像・連続関数

定義 1.1 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

- 写像 $f\colon X \to Y$ が**点列連続 (sequentially continuous)** とは, もし $x_n \to x$ ならば, つねに $f(x_n) \to f(x)$ であることをいう.
- 写像 $f\colon X \to Y$ が**連続 (continuous)** とは, もし $U \subset Y$ が Y の開集合ならば, 逆像 $f^{-1}(U) \subset X$ はつねに X の開集合であることをいう.

点列連続性は, lim の記号を用いると,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)(= f(\lim_{n\to\infty} x_n))$$

と書ける．つまり「f と lim が交換する」ということで, とても自然である．他方 2 つ目の連続性の方は開集合の話で少し分かりづらいかもしれない．しかし実際はこれらは全く同値な概念である．

問題 13 (2pt) 点列連続性と連続性が同値であることを示せ．

問題 14 (1pt) 写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるためには, 次が必要十分であることを示せ．

任意の $\varepsilon > 0$ と $x \in X$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して $f(U_X(x,\delta)) \subset U_Y(f(x),\varepsilon)$.

連続性はとても重要な概念であるので, 同値な条件はすべて覚えておこう．次の問題も大事である．

問題 15 (1pt) $(X \times Y, d)$ を前やった直積距離空間とする．$f\colon X \times Y \to X$ を $f(x,y) = x$ で定めると, 連続であることを示せ．

問題 16 (1pt) $f\colon X \to Y$ を写像とし, ある $C > 0$ に対して, すべての $x, y \in X$ が不等式 $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x,y)$ をみたすとすれば, f は連続であることを示せ．

問題 17 (1pt) $\mathbb{R}^n$ にユークリッドノルムから入る距離を入れる．すべての線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は連続であることを示せ．

問題 18 (2pt) $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とし, $T\colon X \to Y$ を線型写像とする．次が同値であることを示せ．

(1) T は連続である．

(2) T は有界である．すなわちある $C > 0$ が存在して, すべての $x \in X$ に対して $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ をみたす．

問題 19 (1pt) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への連続関数を沢山あげよ．

問題 20 (1pt) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定めると, 連続でないことを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{for } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$\sin x$ とか e^x とかきれいな形ではなくても, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像はすべて関数と呼ぶので注意しておいて欲しい．上の問題はいろんな反例を構成するのによく使われる．

問題 21 (1pt) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定めると, $x \in \mathbb{Q}$ で不連続, $x \notin \mathbb{Q}$ で連続であることを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{for } x = p/q, \\ 0 & \text{for } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ここで p/q は既約分数で $q > 0$.

問題 22 (1pt) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定めると, 原点で不連続であることを示せ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

問題 23 (1pt) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\sin x/x$ で定める．$f(0)$ をいくつに定めたら $\mathbb{R}$ 上の連続関数になるか．

関数を考えるとき, 定義域はどこかということは常に確認しなければならない．上の問題では分母に 0 が来てはいけないので, 始めは $x\neq 0$ で考えるのだが, $x=0$ での値を適当に決めることで連続関数の定義域を拡張できた．この操作を特異点の除去という．これはいつもできるわけではないことを見よう．

問題 24 (1pt) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=1/x$ で定める．

(1) f は $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ で連続であることを示せ．

(2) $f(0)$ をどのように定めても $x=0$ で連続にならないことを示せ．

1.4 内点, 触点, 集積点

前に開集合や閉集合を学んだ．もう少し詳しく学んでいこう．

定義 1.8 (X,d) を距離空間, A を X の部分集合とする．

- 点 $x\in X$ が A の**内点**であるとは, $x\in A$ かつ, ある $\varepsilon>0$ が $U(x,\varepsilon)\subset A$ となるように存在することをいう．
- 点 $x\in X$ が A の**触点**であるとは, 点列 $a_n\in A$ が $a_n\to x$ となるように存在することをいう．
- 点 $x\in X$ が A の**集積点**であるとは, 点列 $a_n\in A\setminus\{x\}$ が $a_n\to x$ となるように存在することをいう．
- もし A の点 x が集積点でないならば, 点 x を A の**孤立点**という．

問題 25 (1pt) 点 $x\in X$ が $A\subset X$ の触点であるには, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $U(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ であることが必要十分であることを示せ．

記号 A の内点の集合を A°, 触点の集合を $\overline{A}$ と書く．それぞれ A の**内部**, A の**閉包**と呼ぶ．

問題 26 (1pt) $\mathbb{R}^2$ においていつものようにユークリッド距離を与える．集合 A を次で定めるとき, その内部, 閉包, 集積点, 孤立点の集合を求めよ．

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}\cup\{(1/n,1/n)\mid n\in\mathbb{N}\}$$

問題 27 (1pt) $\mathbb{R}^2$ においていつものようにユークリッド距離を与える．集合 A を次で定めるとき, その内部, 閉包, 集積点の集合を求めよ．

$$A=\{(x,\sin(x))\mid x\in(0,\pi)\}.$$

問題 28 (1pt) $\mathbb{R}$ において, 次の集合 A の $A^\circ,\overline{A}$, 集積点の集合を求めよ．(1) $A=\{x_0\}$ $(x_0\in\mathbb{R})$. (2) $A=(0,1)$. (3) $A=\mathbb{Q}$. (4) $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

問題 29 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において, 次の集合 A の $A^\circ,\overline{A}$, 集積点の集合を求めよ．(1) $A=\{(x_0,y_0)\}$ $((x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2)$. (2) $A=(0,1)\times[0,1)$. (3) $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

これを次のように一般化して整理しておこう．

問題 30 (1pt) 距離空間 (X_1,d_1), (X_2,d_2) に対して, $(X_1\times X_2,d)$ を直積距離空間とする．部分集合 $A_1\subset X_1$, $A_2\subset X_2$ に対して, $\overline{A_1\times A_2}=\overline{A_1}\times\overline{A_2}$ が成り立つことを示せ．

1.5　外部, 境界など

距離空間の部分集合に対して, その閉包, 内部を定義してきた. 次に外部 (exterior), 境界 (boundary) を定義しよう.

定義 1.9 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

- A の**外部** $\mathrm{ext}\, A$ を次で定義する.
$$\mathrm{ext}\, A = X \setminus \overline{A}.$$
$\mathrm{ext}\, A$ に含まれる点を A の**外点**とよぶ.

- A の**境界** ∂A を次で定義する.
$$\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}.$$
∂A に含まれる点を A の**境界点**とよぶ.

閉包等を図示して視覚的に理解しよう. 以下 $\mathbb{D}$ は閉円盤 $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を表す.

問題 31 (1pt) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 閉円盤 $\mathbb{D}$ を考える. $\mathbb{D}$ の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 32 (1pt) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \{(1, 0)\}$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 33 (1pt) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \setminus \{(0, 0)\}$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 34 (1pt) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{D} \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 35 (1pt) 距離空間 $\mathbb{R}^2$ において, 部分集合 $A = \mathbb{R}^2$ を考える. A の閉包, 内部, 外部, 境界を図示せよ.

問題 36 (1pt) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 点 $x \in X$ に対して, 次は同値であることを示せ.

(1) x は A の孤立点である.

(2) $x \in A$ でありかつ, ある $r > 0$ が存在して, $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

問題 37 (1pt) $\mathbb{R}$ において, $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 38 (1pt) $\mathbb{R}$ において, $A := \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 39 (1pt) $\mathbb{R}$ において, $A := \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 40 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において, $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 41 (1pt) $\mathbb{R}^2$ において, $A := \{(x, \tan(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < \pi/2\}$ と定める. A の集積点と孤立点を決定せよ.

問題 42 (1pt) $\mathbb{R}$ において, $A := \mathbb{Z}$ と定める. A の任意の点は孤立点であることを示せ.