数学 IIB 演習 No. 2

10 月 6 日配布
担当：戸松 玲治

2 位相空間

2.1 位相空間の復習

問題 43 (1pt) 位相空間とは何か?

問題 44 (1pt) 距離空間に位相構造を入れたい。どんな風にするか? 実際位相になることも示せ (**距離位相**という)。

問題 45 (1pt) $X = \{a, b\}$ 上には、位相の入れ方がいくつあるか?

注意してほしいのは、上の問題で見たように**空間 X にはいろんな位相の入れ方が一般にはある。だから今どの位相を選んでいるのかを常に考えておく必要がある**、ということ。実際、何々が開集合かどうかというのは、位相構造を定めている集合族に属しているかどうかなので、位相を取り替えたら、さっきは開集合だったけど今は違うということも起きる。

問題 46 (1pt) 位相空間の開集合と閉集合とは何か?

問題 47 (1pt) 離散位相、密着位相を説明せよ。

これから $\mathbb{R}^n$ を位相空間として扱うとき、**いつもユークリッド距離位相**を考える。もしも異なる位相を考える時には、ちゃんと分かるように明示する。ところで $\mathbb{R}^n$ には距離が沢山考えられた (問題 2)。距離を与えるごとに位相が定まるのだから、位相も沢山あるような気がするが果たしてそうなのだろうか?

問題 48 (1pt) 問題 2 でやった距離についてそれぞれ距離位相を考えると、すべて同じ位相を定めることを確かめよ。

つまり $\mathbb{R}^n$ で普通の距離 (ℓ^p ノルムから来るやつ) の位相は p に依存しないので、たくさん位相が出てきてしまうのではないかと心配する必要はない。ここで ℓ^p ノルムから来る距離は、

$$d_p(x, y) := \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\Big)^{1/p}$$

というもの。$1 \leq p < \infty$ で考える ($0 < p < 1$ だと三角不等式が出ない)。$p = 2$ のときがユークリッド距離。

問題 49 (1pt) 位相空間の部分集合を位相空間としたい。どうしたらよいだろうか (**相対位相, 誘導位相**などと呼ばれる)。

2.2 連続写像・連続関数・開写像

さて距離空間のところの問題 13 を参考にして連続写像を導入しよう。

定義 2.1 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が**連続 (continuous)** とは, もし $U \in \mathcal{O}_Y$ の開集合ならば, つねに $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ であることをいう．

もし $Y=\mathbb{R}$ なら**連続関数**という。

問題 50 (1pt) 連続写像を閉集合を用いて特徴づけよ。

問題 51 (1pt) 連続写像の合成は連続であることを示せ。

問題 52 (1pt) $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。新しい関数 $f+g$, fg を

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad fg(x) = f(x)g(x)$$

とおくと、どちらも連続であることを示せ。

問題 53 (1pt) 上の 2 問を使って、次の関数が連続であることを示せ。どうやって使ったかも説明すること ($\sin x$ など基本的な関数の連続性は認めてよい)。

$$(1).\ \sin(\cos(\sin x)), \quad (2).\ \sqrt{x^2+y^2}, \quad (3).\ e^x(x^2+xy+\sin(2x)).$$

問題 54 (1pt) 連続でない関数を沢山作れ。

問題 55 (1pt) $X=\{a,b,c\}$ に離散位相を入れる。連続関数はどんなものか? 離散、つまり離ればなれになっている気持ちが分かるか?

問題 56 (1pt) $X=\{a,b,c\}$ に密着位相を入れる。連続関数はどんなものか? 密着している気持ちが分かるか?

これら 2 つから位相構造と連続性を変えることによって空間の理解の仕方が変わるということが分かると思う。以後断らない限り、位相空間 X と言った場合位相構造は $\mathcal{O}_X$ か単に $\mathcal{O}$ と書く。

問題 57 (1pt) 写像 $f\colon X \to Y$ を考え、X には離散位相を入れておく。すると f はいつでも連続写像であることを示せ。

問題 58 (1pt) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間として、部分集合 $A \subset X$ に相対位相を入れて位相空間とする。$i\colon A \to X$ を $i(a)=a$ と定める。i は連続写像であることを示せ。

ところで開集合の逆像が開集合になるものが連続だったのだが、開集合の像は開集合なのだろうか?

定義 2.2 $(X, O_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。写像 $f\colon X \to Y$ が**開写像**であるとは、任意の $U \in \mathcal{O}_X$ に対して、$f(U) \in \mathcal{O}_Y$ であることをいう。

問題 59 (1pt) 写像 $f\colon X \to Y$ を考え、Y には離散位相を入れておく。すると f はいつでも開写像であることを示せ。

問題 60 (1pt) 写像 $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $p(x,y)=x$ と定めると、p は開写像であることを示せ。

問題 61 (1pt) 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $p(x)=(x,0)$ と定めると、p は開写像ではないことを示せ。

問題 62 (1pt) 開写像の例を沢山作れ。

問題 63 (1pt) 連続写像だが開写像でないものの例を沢山作れ。

問題 64 (1pt) 閉写像とは何だろうか?

問題 65 (1pt) 開写像ならば閉写像だろうか? 逆はどうだろうか?