

2 位相空間の ABC

2.3 同相写像, 同相

2つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ があったとする. この2つが**同じ位相空間**であると思えるのはどういう時だろうか. まず集合として同じなはずだから, 全単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在しなくては始まらないだろう. 位相空間は位相構造をもつのだから, f が $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_Y$ の構造をそっくり移さなくてはならないだろう. つまり

$$\mathcal{O}_Y = \{f(U) \mid U \in \mathcal{O}_X\}.$$

このとき f を同相写像という. ちゃんと書くと次のようになる.

定義 2.1 2つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ があったとする.

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ が**同相写像** (homeomorphism, ホメオモルフィズム) であるとは, f が全単射かつ連続, そしてなおかつ f^{-1} も連続であるときにいう.
- X と Y に同相写像が存在するとき, X と Y は**同相** (homeomorphic, ホメオモルフィック) であるという.

同相写像のことも単に同相と言ったりもするし, homeomorphism とか homeomorphic のことを homeo(ホメオ) と略したりもする (こっちの方が通っぽい). 数学の1つの大きな課題は, 2つのものが同じか同じでないかを見抜くことである. これを**分類問題**とよぶ. 位相空間論での大きな問題は次である.

課題 1 与えられた2つの位相空間が同相かどうかを調べよ.

例えば $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相だろうか? ベクトル空間の次元が違うからといって, 同相ではないと言いきれない. なぜなら同相写像はベクトル空間の構造を保つ, つまり線型写像である, とは一言も言っていないからである. この問題はまだ難しいのでおいおいやっていくことにする (時間の都合上できないと思うが, こういう疑問がとっても大事). あと例えば, $\mathbb{R}$ と円周 S^1 が同相か, とかいろいろ知りたいことが沢山ある. どうやって同相, 非同相を見抜くか, これが問題なのだが, そのために位相空間のいろんな性質をしらべる. たとえば $\mathbb{R}$ はずーっと広がっているけど, S^1 はこじんまりとしている. この感じを数学的に定式化 (数回後でやるが**コンパクト性**のこと) してやれば, 同相ではないことが証明出来ると期待できる.

問題 66 (1pt) $\mathbb{R}$ (普通の位相) は開区間 $(0, 1)$ ($\mathbb{R}$ の位相を制限した位相) に同相であることを示せ.

問題 67 (1pt) 開区間 $(0, 1)$ と開区間の合併 $(0, 1) \cup (2, 3)$ は同相でないことを示せ (後でやるが**連結性**に関係する. ヒントは中間値の定理).

2.4 位相の強弱

定義 2.2 集合 X に2つの位相, $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が与えられているとする. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つとき, $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ よりも**強い位相**であるという ($\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より**弱い位相**であるともいう).

問題 68 (1pt) 集合 X 上の最強の位相と最弱の位相を求めなさい.

問題 69 (1pt) 集合 X に 2 つの位相, $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が与えられているとする. 恒等写像 id_X が位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ から $(X, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であるための必要十分条件は $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ よりも弱い位相であることを示せ.

問題 70 (1pt) $\mathbb{R}^n$ に以前のように距離 $d_1, d_2, d_{\max}$ を入れる, つまり $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ に対して

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}, \quad d_{\max}(x, y) := \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\}$$

とする. これらの定める距離位相をそれぞれ $\mathcal{O}_{d_1}, \mathcal{O}_{d_2}, \mathcal{O}_{d_{\max}}$ と書く. するとこれらは等しいこと, つまり $\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2} = \mathcal{O}_{d_{\max}}$ であることを問題 69 を使って示せ (ヒント: 連続性 = 点列連続性).

定義 2.3 X を集合, $S \subset X$ を部分集合とする. S を含む位相のうち最弱の位相を S が生成する位相とよぶ.

問題 71 (1pt) 部分集合族から生成される位相がちゃんと存在することを示せ.

問題 72 (1pt) 部分集合族から生成される位相の基として何が取れるか.

問題 73 (1pt) $X = \{a, b, c\}$ とする. $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ が生成する位相を求めよ.

問題 74 (1pt) $\mathbb{R}$ において, $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ という集合族を考える. S が生成する位相は何か.

2.5 第二可算公理

定義 2.4 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が高々可算個の集合からなる開集合系の基をもつとき, **第二可算** (second-countable) であるという. **第二可算公理** (second axiom of countability) をみたすともいう.

問題 75 (1pt) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は第二可算であることを示せ.

第二可算性に関連した性質に可分性がある.

定義 2.5 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

- ある部分集合 $A \subset X$ が, $\overline{A} = X$ をみたすとき, A は X の中で**稠密** (dense) であるという.
- もし X が**高々可算な稠密部分集合**をもつならば, X は**可分** (separable) であるという.

問題 76 (1pt) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は可分であることを示せ.

問題 77 (1pt) 第二可算な位相空間は可分であることを示せ.

この命題の逆は一般に正しくないが, 距離空間の場合は同値である.

問題 78 (1pt) 距離空間が可分であることと, 第二可算公理をみたすことは同値であることを示せ.

第二可算性や可分性は**同相写像で保たれる性質**であることを示そう. このような性質のことを**位相不変性**という.

問題 79 (1pt) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が与えられており, 2 つは同相であるとする. もしも片方が第二可算であれば, 他方も第二可算であることを示せ.

問題 80 (1pt) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が与えられており, 2 つは同相であるとする. もしも片方が可分であれば, 他方も可分であることを示せ.