

2 位相空間の ABC

2.6 近傍系, 基本近傍系, 第一可算公理

第二可算公理は位相空間の大域的な性質である. これからやりたいのは, 第一可算公理というもので, こちらは局所的な性質である. 局所的な構造を調べるためには, 近傍 (neighborhood) という概念が役立つ.

定義 2.1 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の点 $x \in X$ を考える. 部分集合 $W \subset X$ が x の**近傍**であるとは, $x \in W$ かつ x が W の内点であることをいう.

近傍で開集合 (閉集合) のものを**開近傍** (**閉近傍**) という.

問題 81 (1pt) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の点 $x \in \mathbb{R}^n$ の開近傍と閉近傍を 1 つずつ取ってみよ.

定義 2.2 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の点 $x \in X$ を考える. x の近傍となる集合全部の集まり (集合族) を $N(x)$ と書き, x の**近傍系**とよぶ.

問題 82 (1pt) 近傍系 $N(x)$ は次の性質をもつことを示せ.

- $V_1, V_2 \in N(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in N(x)$.
- $V \in N(x), V \subset W \Rightarrow W \in N(x)$.

具体的な位相空間の近傍には, 典型的な集合があることが多い. 例えばユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において, 原点 $x = 0$ を考えよう. そこで

$$\mathcal{U}(x) := \{U(0, 1/n) \mid n = 1, 2, \dots\}$$

とおくと, 近傍の族になっている. もちろん $N(x)$ 全部ではないが, これが基本的に大事であることは予想出来るだろう. なぜそう感じるかというと, 近傍というのは小さければ小さいほど点の周りの状況をよく把握しているものと考ええるものであるからである. 今 0 のどんな近傍 W を考えても, n が十分大きければ $U(0, 1/n) \subset W$ となる. つまり W で 0 付近を眺めるよりも $U(0, 1/n)$ を使って眺めた方がより精密なのである. だから上の集合族 $\mathcal{U}(x)$ だけで 0 の周りの様子が分かるのである. このような $\mathcal{U}(x)$ を抽象的に定義しよう.

定義 2.3 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, 点 $x \in X$ の近傍系 $N(x)$ を考える. 近傍の族 $\mathcal{U}(x) \subset N(x)$ が次の条件をみたすとする:

$$\forall W \in N(x), \exists U \in \mathcal{U}(x) \text{ s.t. } U \subset W.$$

このとき, $\mathcal{U}(x)$ は x の**基本近傍系**とよぶ.

問題 83 (1pt) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の点 x の基本近傍系を 1 つあげなさい.

問題 84 (1pt) 離散位相空間 X を考える. このとき点 x の基本近傍系として $\mathcal{U}(x) := \{\{x\}\}$ が取れることを示しなさい.

定義 2.4 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 各点 $x \in X$ が高々可算個の元からなる基本近傍系をもつとき, $(X, \mathcal{O})$ は**第一可算** (first countable) である, あるいは**第一可算公理** (first axiom of countability) をみたすという.

問題 85 (1pt) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は第一可算であることを示せ.

問題 86 (1pt) 第二可算な位相空間は第一可算であることを示せ.

逆は成り立たないことを次に見よう.

定義 2.5 $\mathbb{R}$ において, 半开区間の族 $S = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ を考える. S が生成する位相を考えたとき, $\mathbb{R}$ を **Sorgenfrey 直線** (**ソルゲンフレイちよくせん**) という.

Sorgenfrey 直線は $\mathbb{R}$ に普通じゃない位相を入れたものなので, いろいろな反例を構成するときに役立つ.

問題 87 (1pt) Sorgenfrey 直線 $\mathbb{R}$ において, $S = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ が位相の基になることを示せ.

問題 88 (1pt) Sorgenfrey 直線 $\mathbb{R}$ を考える. $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{U}(x) := \{[x, x + 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと, これが基本近傍系になることを示せ. Sorgenfrey 直線は第一可算である.

問題 89 (2pt) Sorgenfrey 直線 $\mathbb{R}$ は第二可算ではないことを示せ (ヒント: [矢野 p.70] を見よ).

第一可算でない位相空間の例もあげておこう.

定義 2.6 集合 X に次のように集合族 $\mathcal{T}$ を定める:

$$\mathcal{T} := \{A \in 2^X \mid A = \emptyset \text{ or } X \setminus A \text{ is finite}\}.$$

つまり $A \in \mathcal{T}$ なのは, A が空集合か, 補集合が有限集合のときである. この集合族は X に位相を定める. この位相を **cofinite topology** (有限補集合位相) という.

問題 90 (1pt) cofinite topology は実際に位相であることを示せ.

問題 91 (1pt) 非可算集合 X (たとえば $\mathbb{R}$) に cofinite topology を入れて位相空間とすると, 第一可算でないことを示せ.

問題 92 (1pt) 高々可算集合 X (たとえば $\mathbb{Q}$) に cofinite topology を入れて位相空間とすると, 第二可算 (したがって第一可算) であることを示せ.

問題 93 (1pt) cofinite topology の入った位相空間 X の部分集合 Y に相対位相を入れる. するとその相対位相はまた Y での cofinite topology に一致することを示せ.

問題 94 (1pt) cofinite topology の入った位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ を考える. これらが同相であることの必要十分条件は X と Y の濃度が等しいことであることを示せ.

問題 95 (1pt) $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ に**ザリスキ位相** (Zariski topology) を入れて位相空間とする. この位相は cofinite topology に一致することを示せ.

参考文献

[矢野] 矢野 公一 「距離空間と位相構造」 共立出版